

第 12 章 真空中的稳恒磁场

课件下载：第 12 章
真空中的稳恒磁场

在前面两章中我们研究了静止电荷在其周围激发的静电场的性质和规律，以及静电场与导体和电介质的相互作用规律。如果电荷在运动，那么电荷周围就不仅有电场，而且还有磁场。本章我们首先讨论恒定电流的描述及其产生的条件，然后重点讨论稳恒电流产生的磁场的性质和规律，主要内容有：描述磁场性质的物理量——磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ ，电流激发磁场的基本公式——毕奥-萨伐尔定律；描述磁场性质的两个基本定理——磁场的高斯定理和安培环路定理；磁场对电流和运动电荷的作用规律——安培力和洛伦兹力。

§ 12.1 恒定电流

我们知道当导体在静电场中处于静电平衡状态时，其内部的电场强度 $\mathbf{E}$ 处处为零，导体内部的自由电荷没有宏观的定向运动，只有无规则的热运动，整个导体是一个等势体。但是如果在导体两端维持一个恒定的电势差，从而在导体内部产生一个恒定不变的电场，则导体内的自由电荷作无规则热运动的同时，还将在电场力的驱动下作宏观的定向运动而形成电流。

本节将论述恒定电流的描述及其形成条件，欧姆定律的微分形式，电源电动势等基本概念。

12.1.1 电流 电流密度

电流是由电荷的定向运动形成的。导体中的运动电荷可以是自由电子、正离子或负离子，这些运动电荷统称为**载流子**（carrier），载流子的定向运动形成的电流称为**传导电流**（conductive current）。此外，带电物体作机械运动时也能形成电流，称为**运流电流**（convection current）。本节只讨论传导电流。

我们知道在导体内要形成传导电流必须满足两个条件，一是存在可以自由移动的载流子，二是有驱动载流子作定向运动的电场。在金属导体内，形成电流的载流子是自由电子；半导体内的载流子是带负电的自由电子和带正电的“空穴”；电解液中的载流子是正负离子。通常人们规定正电荷定向流动的方向为电流的方向。因此导体内的电流总是沿着电场线的方向流动，即总是由电势高处流向电势低处。必须指出，电流虽然有大小和流向，但不是矢量，而是标量。

描述电流强弱的物理量是**电流强度**，简称**电流**（electric current），用 I 表示，它定义为单位时间内通过导体横截面的电量，即

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12.1)$$

在国际单位制中，规定电流为 7 个基本物理量之一，其单位为安培，用符号 A 表示，

关于安培的定义可参见本章 § 12.5.2；电流的其它常用单位还有毫安（mA）和微安（ μA ），它们之间的换算关系为： $1\mu\text{A}=10^{-3}\text{mA}=10^{-6}\text{A}$ 。

电流 I 仅仅反映了通过导体横截面的电流的整体情况，当电流在粗细不均匀的导体中或者在大块导体中流动时，电流 I 不能具体描述导体任一横截面上各处的电流分布情况，如图 12.1 所示。为了定量地描述导体内电流的空间分布特点，必须引入一个新的物理量——**电流密度**（current density），用符号 $\mathbf{j}$ 表示。电流密度是一个矢量，其方向表示导体内任一点处电流的方向（即正电荷在该处定向漂移的运动方向），大小表示通过该点与电流方向垂直的单位横截面上电流的大小。在国际单位制中，其单位是： $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

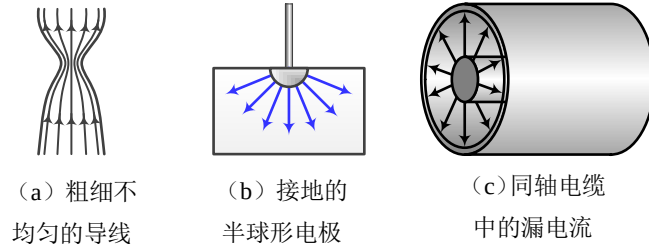


图 12.1 在大块导体中的电流分布

如图 12.2 所示，假设在大块导体内任意一点处，在垂直于电流方向上取一面积元 dS_0 ，若在 t 时刻通过面积元 dS_0 的电流为 dI ，则该处电流密度 $\mathbf{j}$ 为

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_0} \mathbf{n}_0$$

(12.2)

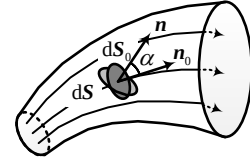


图 12.2 电流密度

式中 $\mathbf{n}_0$ 是沿电流方向的单位矢量。一般情况下，面积元 dS 的法线方向与该处电流方向之间有一个夹角 α ，则通过该面积元的电流为

$$dI = j dS \cos \alpha = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.3)$$

于是通过导体内任意一个曲面 S 的电流为

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.4)$$

上式表明，通过导体内任意曲面 S 的电流等于电流密度矢量通过该曲面的通量，即电流密度 $\mathbf{j}$ 对于该曲面 S 的曲面积分。

在大块导体内各点电流密度 $\mathbf{j}$ 的大小和方向一般是不同的，而且随时间改变，即 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z, t)$ ，因此电流密度 $\mathbf{j}$ 在导体内将会形成一个随时间变化的矢量场，称之为**电流场**，它反映了导体内部在某一时刻电流的空间分布情况。为了能形象、直观地描述电流在导体内部的分布情况，我们引入**电流线**（electric current line）的概念来描述电流场。人们规定：**电流线上任意一点的切线方向与该点处电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 的方向一致**（也与正电荷在该点定向漂移的运动方向一致），**电流线的疏密程度表示电流密度的大小**。

12.1.2 电流连续性方程 电流恒定的条件

根据电流的定义： $I = \frac{dq}{dt}$ ，若在导体内任取一封闭曲面 S ，则电流密度 $\mathbf{j}$ 对该封闭曲面的通量 $\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 就是单位时间内从该封闭曲面内流出的总电量 $\frac{dq}{dt}$ 。由电荷守恒定律可知，在 dt 时间内从封闭曲面 S 内向外流出的电量 dq ，应等于封闭曲面内总电量 Q 的减少量 $-dQ$ 。若以 $\frac{dQ}{dt}$ 表示封闭曲面内总电量随时间的变化率，则有

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} \quad (12.5a)$$

式 (12.5a) 称为**电流的连续性方程**。显然，该方程是电荷守恒的必然结果，也是电荷守恒定律的数学表述。若利用 $Q = \iiint_V \rho dV$ ，其中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为电荷体密度分布函数，则电流的连续性方程式 (12.5a) 又可表示为

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (12.5b)$$

下面从电流连续性方程 (12.5) 出发，来讨论恒定电流产生的条件。在导体内任意取一个封闭曲面 S ，如果在封闭曲面 S 内的总电量 Q 不随时间变化，亦即 $dQ/dt = 0$ ，则有

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12.6)$$

上式表明，当导体内任何地方都不会出现电荷的积累或削减时，从封闭曲面的一部分流入的电流，等于从封闭曲面其余部分流出的电流。这意味着此时导体内的电流分布达到了稳定状态，即电流密度矢量 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$ 的空间分布将不随时间变化，这样的电流称为**恒定电流**，或称为**稳恒电流**。所以式 (12.6) 就是**电流恒定的条件**。

12.1.3 欧姆定律及其微分形式

1. 欧姆定律

德国物理学家欧姆 (Georg Simon Ohm, 1787--1854) 在 1826 年通过实验发现，导体中的电流 I 与该导体两端的电势差 $U = V_1 - V_2$ 成正比，与该导体的电阻 R 成反比，即

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad (12.7)$$

这一规律称为**欧姆定律**。欧姆定律表明：当导体两端的电势差 U 一定时，导体的电阻 R 越大，流过导体的电流 I 就越小； R 越小，通过导体的电流就越大。所以电阻 R 的大小反映了导体对电流的阻碍程度。

实验表明，导体的电阻与导体材料的性质、形状、尺寸和温度等因素有关。对于横截面

均匀的导体，当导体的材料均匀一致，温度一定时，其电阻 R 与导体的长度 l 成正比，与导体的横截面积 S 成反比，即

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (12.8)$$

此式称为**电阻定律**。式中的比例系数 ρ 由导体材料的性质和温度决定，称为导体的**电阻率**，其倒数称为**电导率**，用符号 σ 表示，即 $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ，电导率越大表示导体的导电能力越强。

在国际单位制中，电阻 R 的单位是： Ω ，电阻率 ρ 的单位是： $\Omega \cdot \text{m}$ ，电导率的单位是： $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

若电流在截面不均匀的导体中流动，或导体的电阻率 ρ 不均匀时，则可将导体沿电流方向分解为无穷多个长为 dl 的“短导体”的串联，导体的总电阻可通过以下积分式计算，即

$$R = \int dR = \int \rho \frac{dl}{S} \quad (12.9)$$

例 12.1 如图 12.3a 所示，高度为 h 的两个共轴金属圆环，其内环的外半径和外环的内半径分别为 R_1 和 R_2 ，两环间充满电阻率为 ρ 的均匀导电材料（ ρ 远大于金属圆环的电阻率）。当两环之间加上电压 U 后，电流沿径向由内向外流动。试求：

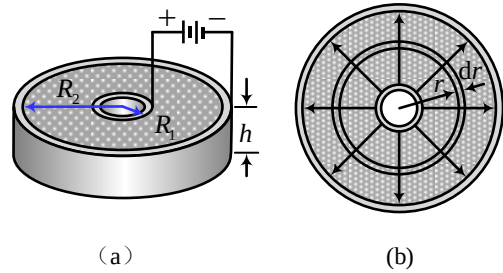


图 12.3 例 12.1 图

- (1) 两圆环之间导电材料的总电阻；
- (2) 两环之间距离环心为 r 处电流密度的大小和方向。

解：(1) 由题意可知，两导体圆环之间将有径向电流，电流方向沿径向从内向外，相应的电阻称为径向电阻。由于沿径向方向导体的横截面积随半径改变，所以因利用式 (12.9) 计算总电阻。为此，在导电材料上任取一半径为 r 、宽度为 dr 、高度为 h 的薄圆环，其侧面积为 $2\pi rh$ ，则薄圆环的径向电阻为

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi rh}$$

所以整个导电材料的径向总电阻为

$$R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- (2) 由欧姆定律可得导电材料中的径向总电流为

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi h U}{\rho \ln(R_2/R_1)}$$

于是在距离环心为 r 处电流密度的大小为

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi rh} = \frac{U}{r\rho \ln(R_2/R_1)}$$

方向沿径向向外。

2. 欧姆定律的微分形式

导体中的电流是导体中的载流子在电场力的驱动作用下作定向运动的结果, 而导体内电流的分布状况用电流密度矢量 $\mathbf{j}$ 来描述, 因此导体内电流密度的分布与电场强度的分布必定有密切关系, 这种关系可以用欧姆定律 $I = U/R$ 导出。

如图 11.4 所示, 在恒定电流场 $\mathbf{j}$ 中沿电流线方向取一段长为 dl 、横截面积为 dS 的微流管, 则该微流管中的电流为 $dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = jdS$, 电阻为 $R = \rho \frac{dl}{dS}$, 式中 ρ 为微流管中的电阻率。假设微流管两端的电势分别为 V 和 $V + dV$, 其两端的电势差为

$$dU = V - (V + dV) = -dV$$

再由欧姆定律 $dI = \frac{dU}{R}$, 可得

$$j = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{dV}{dl} \right) = \sigma E \quad (12.10)$$

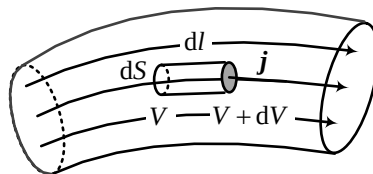


图 12.4 欧姆定律的微分形式

式中 $E = -\frac{dV}{dl}$ 是微流管中的电场强度。因导体内 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 的方向处处相同, 所以式 (12.10)

也可表示为矢量形式, 即

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (12.11)$$

这一关系称为**欧姆定律的微分形式**。

欧姆定律的微分形式描述了导体内部 $\mathbf{j}$ 与 $\mathbf{E}$ 的线性响应的关系, 它表明导体中各点的电流密度与该点处的电场强度成正比。它不仅在稳恒条件下适用, 而且在场强 E 不太大、电流变化不太快的非稳恒条件下也适用, 因此欧姆定律的微分形式比由式 (12.7) 给出的欧姆定律更具普适性。

12.3 电源 电动势

1. 电源

要在导体中维持稳恒电流, 就必须在导体内保持恒定不变的电场, 也就是要在导体两端维持恒定不变的电势差。那么, 怎样才能维持恒定不变的电势差呢?

首先我们来考察一个带电电容器的放电过程, 如图 12.5 所示。开始时电容器的两个极板 A、B 分别带有正负电荷, 当用导线将电容器的正负极板连接起来时, 在静电力作用下, 正电荷从正极板通过导线流到负极板形成电流 (实际流动的是带负电的自由电子), 但这种

电流是一种瞬态电流,因为两极板上的正负电荷因不断中和而逐渐减少,两极板间的电势差与导线中的电流也逐渐减小直至为零。可见在电流回路中仅有静电力的作用无法维持稳恒电流。

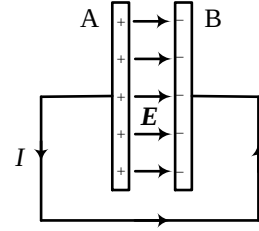


图 12.5 电容器的放电过程

为在导体内维持恒定电流,需要有一种本质上与静电力完全不同的**非静电力**,它能不断地将正电荷从负极输运到正极,以维持两极板间有一个恒定的电势差,从而在导体中建立恒定电场,产生恒定电流。我们**将能够提供非静电力、并能将其他形式的能量转换成电能的装置称为电源 (power)**。由此可见,电源的作用就是提供非静电力,用于反抗静电力而做功,将正电荷从电源负极通过电源内部输运到电源正极,以维持正负极之间有一个恒定不变的电势差,同时将其其他形式的能量转换成电能。

电源的种类由很多,常见的有干电池,纽扣电池、可充电的铅锌蓄电池、锂电池,太阳能电池以及各种交直流发电机等。

2. 电动势

通常的电源都有正、负两极。正电荷经电源的外电路,在静电力作用下从电源正极流向电源负极,然后在非静电力作用下,通过电源正负两极之间的内电路,从负极流向正极,内外电路衔接形成闭合电路。在电源的持续作用下,电荷在闭合电路中源源不断地流动,形成恒定电流。

我们用 E_k 表示单位正电荷受到的非静电力,人们**将单位正电荷从电源负极经电源内部输运到正极时,非静电力所作的功**: $\int_-^+ E_k \cdot dl$, 称为电源的**电动势 (electromotive force)**, 常用 ε 表示, 即

$$\varepsilon = \int_-^+ E_k \cdot dl$$

(12.12)

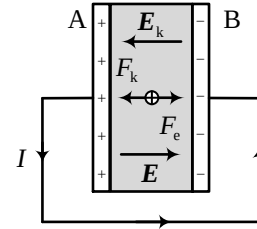


图 12.6 电源及其电动势

电源电动势的大小反应了电源内部非静电力做功的本领,或者说反映了电源将其它形式的能量转换为电能的能力。在国际单位制中,电动势的单位也是: 伏【特】(V)。

电动势是标量,但是习惯上我们给电动势定义了一个方向,即在**电源内部从负极指向正极作为电动势的方向**。

如果在整个闭合回路上都存在着非静电力,例如在电磁感应中,当闭合回路放在随时间变化的磁场中时,回路上处处都存在由涡旋电场产生的非静电力。在这种情形,就没有“电源内部”和“电源外部”之分,整个闭合回路的总电动势为

$$\varepsilon = \oint_L E_k \cdot dl$$

(12.13)

上式表明,闭合回路上的电动势等于将单位正电荷沿此回路运动一周时非静电力所作的功。

§ 12.2 磁场 磁感应强度

12.2.1 基本的磁现象

早在公元前 6~7 世纪,人类对磁现象就有了初步的发现与认识。我国春秋时期的古书《吕氏春秋》中就记载有“磁石召铁”的现象。人类早期发现的磁铁矿(Fe_3O_4)是一种天然磁石,而现代广泛使用的磁铁则多数是由铁、钴、镍等合金人工制成。研究发现,天然磁铁和人工磁铁都具有吸引铁、钴、镍等物质的特性,称为**磁性**(magnetism)。磁铁上磁性最强的区域称为**磁极**(magnetic pole)。自然界中磁铁的磁极总是成对出现的,分别被称为北极(N极)和南极(S极)。无论将磁铁截断分割成多么小的部分,它的每一部分都具有**一对磁极**。迄今为止,人类还没有发现能在自然界稳定存在的单独磁极(也称为磁单极)。如同静止电荷之间存在相互作用的静电库仑力一样,磁极之间也存在相互作用,并有类似的规律:即同性磁极相互排斥,异性磁极相互吸引。实验观测表明,地球自身就是一个巨大的磁体,因为放置在地球表面的小磁针的两极总是分别指向地球的南北两极。古代中国人最早利用这一现象发明了指南针,被广泛应用于军事与航海活动,并最早发现了地磁场的两极方向与地理上的南北极方向之间的夹角,称为**磁偏角**(magnetic declination),这一发现被记载于沈括的《梦溪笔谈》。

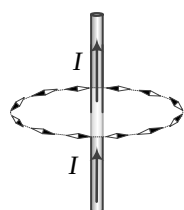


图 12.7 直流电附近小磁针取向的右手定则

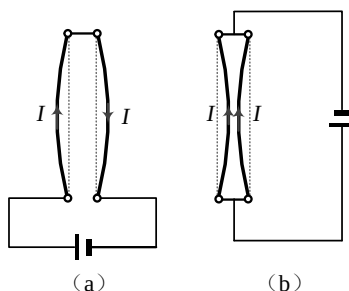


图 12.8 通电导线之间的相互作用

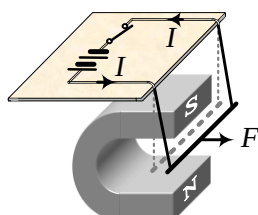


图 12.9 磁场对通电导线的作用

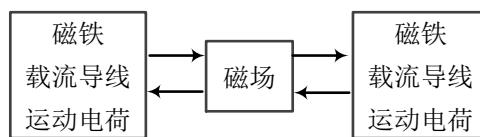


图 12.10 6种基本的磁相互作用

文档 12.1 奥斯特

实际上在人类发展的历程中,磁现象的发现要早于电现象。但在相当长的一段时期内,磁现象与电现象的研究一直彼此独立地进行着,这是因为当时人们还没有认识到两种现象之间的内在联系。直至 1820 年 7 月 21 日,丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted)公布了他的一项重要发现:通电导线会使其附近的小磁针发生偏转。这才逐渐揭开了电磁现象之间的内在联系。同年 9 月 18 日,法国物理学家安培(A. M. Ampere)通过大量实验发现了载流导

线周围小磁针偏转的右手定则，如图 12.7 所示；9 月 27 日又发现了两根通电载流导线也有相互作用，如图 12.8 所示。在随后完成的一系列的实验中，人们又相继发现了磁铁与载流导线之间、磁铁与运动电荷之间、甚至运动电荷与的运动电荷之间都有相互作用力。这种力统称为**磁力**（magnetic force）。由此人们总结出基本的磁相互作用可以用图 12.10 来表示。

至此人们认识到磁现象与电现象之间是彼此密切相关的。基于这一认识，安培于 1822 年提出了著名的有关物质磁性本质的**分子电流假说**。安培认为一切磁现象的根源是电流，磁性物质的分子中存在环形电流，称为**分子电流**（molecular current）。物质的磁性起源于构成物质的分子电流对外界的磁效应的总和。

安培的这一假说与现代的物质磁性理论是符合的。近代物理理论指出，分子电流是由原子核外电子的绕核运动和自旋运动形成的，而导线中的电流同样是由电荷的定向运动形成的，所以一切磁现象的本质都起源于电荷的运动。

12.2.2 磁场 磁感应强度

同电荷与电荷之间的电相互作用需要电场来传递一样，各种磁相互作用也不是超距作用，也需要一种特殊的物质来传递，这种特殊的物质称为**磁场**（magnetic field）。各种磁性物质、载流导线和运动电荷都会产生磁场，并对处于磁场的中其它磁性物质、载流导线和运动电荷产生磁力作用，如图 12.10 所示。近代物理实验表明，磁场和电场一样，都是物质存在的一种形式，它们都具有能量和质量，当电磁场在空间运动时，它们还具有动量。

人们曾经用试验电荷作为测试手段，来讨论和检测静电场的强弱和性质。与此类似，在研究磁场时，我们也可从磁场对运动电荷或小磁针或小线圈的作用规律出发，来定量地描述和研究磁场，从而定义体现磁场强弱和性质的一个重要的物理量——**磁感应强度**（magnetic induction），并用矢量符号 $\mathbf{B}$ 表示。

实验发现，磁场对运动电荷的作用力的大小和方向不仅与运动电荷的电量有关，而且还与电荷运动的速度大小以及方向有关，当电量为正（ $q > 0$ ）的试验电荷，以速度 $\mathbf{v}$ 进入某一磁场时，

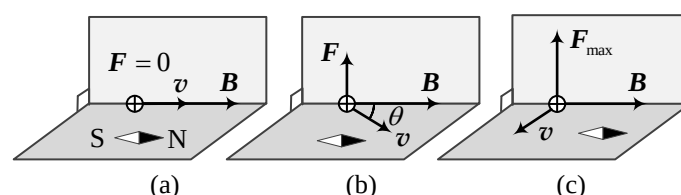


图 12.11 运动电荷在磁场中受到的磁力——洛伦兹力

1. 如果试验电荷在磁场内沿某个特殊的方向（或其相反方向）运动，运动电荷在磁场中所受的磁力为零，即 $\mathbf{F} = 0$ ；如果我们在磁场中放置一个小磁针，则小磁针停止转动时其 N 极就指向该特殊方向，如图 12.11（a）所示。我们规定这个特殊方向就是该处磁场中磁感

应强度矢量 $\mathbf{B}$ 的方向，也称为该处的磁场方向。

2. 当试验电荷的运动方向与磁场方向有任意夹角 θ 时，试验电荷 q 在磁场中受到的磁力 $\mathbf{F}$ 的大小虽然不同，但其方向总是垂直于 $\mathbf{v}$ 与磁场方向所组成的平面，如图 12.11 (b) 所示。

3. 当试验电荷 q 的速度 $\mathbf{v}$ 垂直于磁场方向时，其所受到的磁力取得最大值 $F_{\max}$ ，如图 12.11 (c) 所示。定量研究表明，这个最大磁力 $F_{\max}$ 的大小与试验电荷的电量 q 和它速度的大小 v 的乘积成正比，但比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 具有确定的值，只与该点磁场的强弱有关。磁场中不同的点这一比值一般不同，这反映了不同点处磁场的强弱程度一般不同。

由此，我们定义磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 的大小为

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (12.14)$$

磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 的方向就是小磁针在该处静止时 N 极的指向。

人们通过实验归纳出运动电荷在磁场中受到的磁力可表示为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.15)$$

这就是运动电荷在磁场中受到的磁场力，通常称为洛伦兹力。

在国际单位制 (SI) 中，磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的单位为特斯拉，符号为 T，即

$$1\text{T} = \frac{1\text{N}}{1\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

在工程上， $\mathbf{B}$ 的单位还有另外一种常用的、非国际单位制单位，称为高斯 (Gauss)，符号为 G，它与特斯拉 (T) 的关系为

$$1\text{ T} = 10^4\text{ G}$$

§ 12.3 毕奥—萨伐尔定律

在静电场中求任意带电体产生的场强分布时，我们可将带电体看成是由无限多个电荷元组成的集合，先求出任意电荷元（可视为点电荷）的场强分布，再利用场强叠加原理求解该带电体产生的场强分布。本节，我们将采用类似的方法求解任意载流导线所产生的磁场分布。

12.3.1 毕奥-萨伐尔定律

1820 年 10 月，法国物理学家毕奥 (J. B. Biot) 和萨伐尔 (F. Savart) 通过实验发现，载流直导线周围任意一点的磁场，其磁感应强度的大小与直导线上电流的大小成正比，与直导线到该场点的距离 r 成反比。后来法国数学家拉普拉斯 (P. S. M. Laplace) 根据毕奥和萨伐尔的实验结论，运用物理学的思想方法，从数学上给出了一个电流元产生的磁感应强度的数学表达式，从而建立了著名的毕奥-萨伐尔定律。

在真空中，任意形状的一段载流导线可以看作是由许多长度为 $d\mathbf{l}$ 、电流为 I 的无限小段电流构成的集合，每一小段上的电流 I 与其长度矢量 $d\mathbf{l}$ 的乘积称为**电流元**，记为 $I d\mathbf{l}$ 。特别注意：电流元 $I d\mathbf{l}$ 是一个矢量，其方向就是电流元所在位置处电流的方向。

毕奥-萨伐尔定律指出：电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间某点 P 处激发的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元 $I d\mathbf{l}$ 的大小成正比，与电流元到场点 P 的距离 r 的平方成反比，与从电流元 $I d\mathbf{l}$ 到 P 点的位矢 $\mathbf{r}$ 之间的夹角 θ 的正弦成正比，在国际单位制中， $d\mathbf{B}$ 的大小用数学公式可表示为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (12.16)$$

式中 $\frac{\mu_0}{4\pi}$ 为比例系数， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ 称为真空磁导率。 $d\mathbf{B}$ 的方向与 $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ 的方向相同，即 $d\mathbf{B}$ 与 $I d\mathbf{l}$ 和 $\mathbf{r}$ 的方向之间满足右手螺旋关系，如图 12.12 (b) 所示。若将式 (12.16) 写成矢量形式，则有

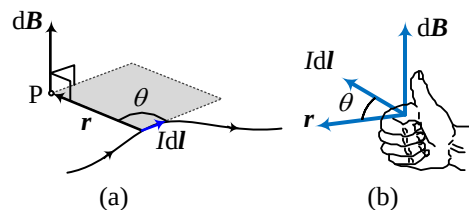


图 12.12 毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (12.17)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$ 为 $\mathbf{r}$ 方向的单位矢量。此即毕奥-萨伐尔定律的数学表达式。实验证明，磁场和电场一样，也遵守场强叠加原理。因此，整个载流导线在空间某点 P 产生的磁感应强度等于各电流元在 P 点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的矢量和，即

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (12.18)$$

上式为一矢量积分，实际计算时可根据具体情况先求出 $d\mathbf{B}$ 在各坐标轴上的分量，然后对各分量式进行积分，最后进行矢量合成。

应该指出，毕奥-萨伐尔定律是在大量实验基础上经理论分析与科学抽象得出的结论，由于不存在单独的电流元，因此，该结论不能用实验直接证明，然而由这个定律得到的结果和实验相符，这就间接证明了毕奥-萨伐尔定律的正确性。

12.3.2 毕奥-萨伐尔定律的应用

毕奥-萨伐尔定律表明，只要给定任意形状载流体的电流的空间分布，原则上，就可以算得磁场的空间分布。下面应用式 (12.18) 来导出几种典型形状的载流导线的激发的磁场分布公式。

1. 载流直导线的磁场

如图 12.13 所示，真空中有一条长度为 l 、通有恒定电流 I 的直导线 A_1A_2 ，试求载流直

导线附近任意一点 P 处的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。已知 P 点到直导线的垂直距离为 a 。

过 P 点作直导线的垂线，取其垂足为坐标原点 O，建立如图 12.13 所示的直角坐标系 $O-xyz$ ，载流导线沿 y 轴放置，电流沿 y 轴正方向流动。在载流导线上距离 O 为 y 处任取一电流元 $I dy$ 。由毕奥-萨伐尔定律，它在 P 点处激发的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dy \sin \theta}{r^2}$$

其方向垂直于 $O-xy$ 平面并沿 z 轴负方向。由于载流导线上各电流元在 P 点处产生的磁感应强度的方向均相同，因此整个载流导线在 P 点产生的磁感强度大小为

$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{A_1}^{A_2} \frac{\sin \theta dy}{r^2}$$

式中 r 、 y 、 θ 均为变量。由图中的几何关系可知，

$$r = \frac{a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$y = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot \theta$$

将上式两边取微分，有

$$dy = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

将以上关系式代入 B 的表达式，并积分可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (12.19)$$

其中， θ_1 为载流导线起点处电流方向与连线 A_1P 之间的夹角； θ_2 为导线终点处电流方向与连线 A_2P 之间的夹角。

当直导线的长度 $l \gg a$ 时，此时载流直导线近似为“无限长”。

在导线的起点处 $\theta_1 = 0$ ，终点处 $\theta_2 = \pi$ ，代入式 (12.19)，可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (12.20)$$

这就是“无限长”载流直导线的磁感应强度的分布公式。不难看出，

“无限长”载流直导线产生的磁场分布具有“无限长”的轴对称性，

即在与直导线垂直的任意平面内，在半径为 a 的圆周上各点磁感应

强度的大小均相等，方向均沿圆周的切线方向，并与电流方向满足右手螺旋法则，如图 12.14 所示。

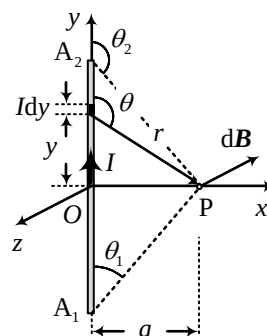


图 12.13 载流直导线的磁场

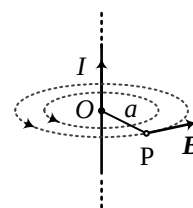


图 12.14 “无限长”载流直导线的场强分布

2. 圆电流轴线上任意一点的磁场

如图 12.15 所示，真空中有一载流圆环，通有恒定电流 I ，已知圆环的半径为 R ，试求圆环轴线上任意一点 P 处的磁感应强度。

以圆心为坐标原点， x 轴沿圆环的轴线方向，建立直角坐标系，如图所示。在圆环上任取一个电流元 $I d\mathbf{l}$ ，该电流元到轴线上任意一点 P 点的矢径为 $\mathbf{r}$ ，不难看出，电流元矢量 $I d\mathbf{l}$ 与矢径 $\mathbf{r}$ 的夹角为 $\pi/2$ 。由毕奥-萨伐尔定律可得，电流元 $I d\mathbf{l}$ 在 P 点的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\pi/2)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

方向垂直于 $I d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{r}$ 构成的平面。显然，圆环上各电流元在 P 点激发的磁感应强度的方向各不相同。但由电流分布的轴对称性可知，圆环上各电流元在 P 点激发的磁感应强度在垂直于 x 轴方向上的投影分量 $d\mathbf{B}_\perp$ 将互相抵消，

所以 P 点处磁感应强度的方向将平行于 x 轴。为此，我们只需考虑 $d\mathbf{B}$ 沿 x 轴上的分量 $d\mathbf{B}_x$ ，并对其积分即可。由图可知

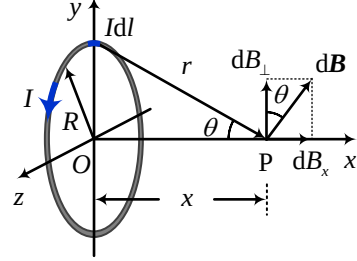


图 12.15 圆电流轴线上的磁场

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl$$

所以圆电流在 P 处产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小为

$$B = \int_l dB_x = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

通常将上式改写为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (12.21a)$$

此即圆电流轴线上任意一点 P 处磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的计算公式，场强的方向与电流方向同样满足右手螺旋定则。

由式 (12.21a)，可以得到在圆电流的圆心处 ($x=0$)，磁感应强度的大小为

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (12.22)$$

利用圆电流圆心处的场强公式，圆电流轴线上任意一点的场强公式 (12.21a) 还可以写成更加简单和更便于记忆的公式，即

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \sin^3 \theta = B_0 \cdot \sin^3 \theta \quad (12.21b)$$

其中 B_0 为圆电流在圆心处激发的磁场。

在讨论圆电流和其它平面载流线圈的磁性质时，我们通常引入**磁矩** (magnetic moment) 概念来加以描述。如果有一个平面载流线圈，线圈中的电流为 I ，线圈的面积为 S ，线圈的总匝数为 N ，则该平面载流线圈的磁矩定义为

$$\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n} \quad (12.23)$$

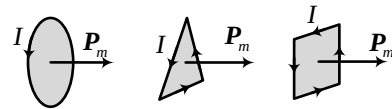


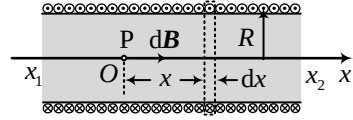
图 12.16 平面载流线圈的磁矩

式中, $\mathbf{n}$ 为线圈平面法向的单位矢量, 它与线圈中的电流方向构成右手螺旋关系, 如图 12.16 所示。于是圆电流轴线上任意一点的磁感应强度公式还可以写为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 P_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (12.21c)$$

3. 载流密绕直螺线管线圈在其轴线上的磁场

设真空中有一半径为 R 的均匀密绕的载流直螺线管线圈, 其电流为 I , 管长为 l , 沿轴线单位长度的匝数为 n 。图 12.17 画出了包含线圈轴线的纵向剖面图。



试求螺线管内轴线上任意一点 P 处的磁感应强度 B 。

图 12.17 载流直螺线管线圈轴线上任意一点处的磁场计算

整个载流直螺线管线圈可看成是由许多半径相同的圆电流的集合。取 P 点为坐标原点 O , x 轴沿轴线方向。在距离 P 点为 x 处, 任取一小段长为 dx 的圆线圈 (可视为圆电流), 其上圆线圈的匝数为 ndx , 相应的等效圆电流的大小为

$$dI = nIdx$$

利用圆电流轴线上任意一点的场强公式 (12.21a), 该等效圆电流在 P 点处激发的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 nI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

方向沿轴线方向, 且与电流方向成右手螺旋关系。所以 P 点处总磁感应强度的大小为

$$B = \int dB = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 R^2 nI}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{\mu_0 nI}{2} \left[\frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right] \quad (12.24)$$

式 (12.24) 就是载流密绕直螺线管线圈轴线任意一点处磁感应强度的计算公式。

当管长 $l \gg R$ 时, 螺线管可近似为无限长, 此时 $x_1 \rightarrow -\infty$, $x_2 \rightarrow \infty$, 代入上式, 可得

$$B = \mu_0 nI \quad (12.25)$$

此结果表明, 无限长载流密绕直螺线管线圈在其轴线上各点的磁感应强度均相等。下一节还将证明, 长直螺线管内部的磁场是均匀磁场。

在长直螺线管线圈的端口处, 如螺线管的左端, $x_1 = 0$ 、 $x_2 \rightarrow \infty$, 于是

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI \quad (12.26)$$

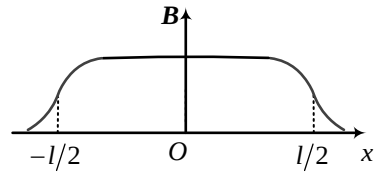


图 12.18 载流直螺线管线圈轴线上的磁场分布

比较式 (12.25) 和 (12.26) 可知, 载流密绕直螺线管端口处磁感应强度的大小近似等于螺线管中部轴线上磁感应强度大小的一半, 螺线管轴线上各处磁感应强度的分布情况大致

如图 12.18 所示。

例 12.1 一根无限长载流导线被弯曲成如图 12.19 所示的形状，其中 ab、cd 均为直线段，bc 段是半径为 R 的圆弧，对应的圆心角为 120° ，圆心在 ab 的延长线上，且 ab 与 cd 垂直。已知导线中的电流为 I 。试求载流导线在圆心 O 处产生的磁感应强度。

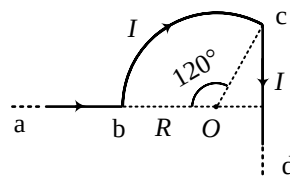


图 12.19 例 12.1 图

解： 根据场强叠加原理，圆心 O 处的磁场由 ab、bc、cd 三段载流导线共同产生。由于 O 点在导线 ab 的延长线上，由毕奥-萨伐尔定律可知，ab 段在 O 处产生的磁感应强度为零，即 $B_{ab} = 0$

圆心 O 到直导线 cd 段的距离为

$$a = R \sin 30^\circ = R/2$$

所以由载流直导线产生的场强分布公式，可得直导线 cd 段在圆心 O 点产生的磁感应强度为

$$B_{cd} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 30^\circ - \cos 180^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$$

方向垂直纸面向里；

再求圆弧 bc 段产生的磁场。在圆弧上任取一个电流元 Idl ，由毕奥-萨伐尔定律，可知它在圆心 O 处产生的磁感应强度的大小为

$$dB_{bc} = \frac{\mu_0 Idl \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}$$

方向垂直纸面向里，所以整个 $1/3$ 圆弧段产生的磁感应强度的大小为

$$B_{bc} = \int dB_{bc} = \int_0^{2\pi/3} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{1}{3}$$

根据场强叠加原理，圆心 O 处总磁感应强度的大小为

$$B = B_{ab} + B_{bc} + B_{cd} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) + \frac{\mu_0 I}{6R}$$

方向垂直纸面向里。

例 12.2 如图 12.20 所示，一块宽为 b 的无限长载流导体薄板，其电流为 I 。试求薄板中轴线外、离薄板的距离为 a 的 P 点的磁感应强度。

解： 以 P 点到薄板中轴线的垂足作为坐标原点 O ，建立坐标系如图 12.21 所示，其中图 (b) 是它的俯视图。该载流薄板可看成是由许多沿 z 轴流动的长直载流导线组成的集合。任取一个宽为 dy 的

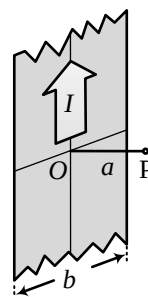


图 12. 例 12.2 图

长直导线，其上电流为 $dI = \frac{I}{b} dy$ ，它在 P 点处激发的磁感应强度的

大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi r} dI = \frac{\mu_0 I}{2\pi b \sqrt{a^2 + y^2}} dy$$

其方向在 O - xy 平面内，且与由 dy 引向点 P 的矢径垂直，如俯视图 (b) 中所示。不难看出，

$d\mathbf{B}$ 在 x 、 y 轴上的投影分量为

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I y}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy$$

$$dB_y = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy$$

对上述两个分量分别积分，可得

$$B_x = \int dB_x = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 I y}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy = 0$$

$$B_y = \int dB_y = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\mu_0 I a}{2\pi b (a^2 + y^2)} dy = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2a}$$

即 P 点磁感应强度的大小为 $\frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{2a}$ ，方向沿 y 轴方向。

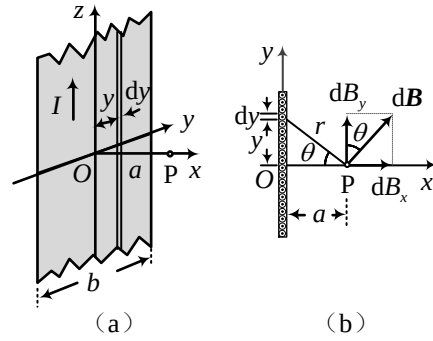


图 12.21 例 12.2 解图

12.3.3 运动电荷的磁场

由于电流是由电荷的定向运动形成的，据此我们自然地能够理解，电流产生的磁场从本质而言是运动电荷产生的磁感应强度的叠加的结果。下面我们利用毕奥-萨伐尔定律推导出运动电荷产生的磁感应强度的计算公式。

如图 12.22 所示，设导体中单位体积内有 n 个作定向运动的电荷，每个电荷带有电量 q （不妨假设 $q > 0$ ），以平均漂移速度 v 沿电流元 Idl 方向匀速运动而形成电流 I ，如果电流元的横截面为 s ，则单位时间通过横截面 s 的电量为 $nqsv$ ，亦即 $I = nqsv$ ，将其代入电流元 Idl 表达式，则有

$$Idl = nqsvdl = nqsdl \cdot v$$

由毕奥-萨伐尔定律，该电流元在场点 P 处产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{nqsdl(v \times \mathbf{r})}{r^3}$$

同时注意到电流元内有 $dN = nsdl$ 个运动电荷，故每一个以速度 v 运动的电荷 q 在场点 P 处产生的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 就是

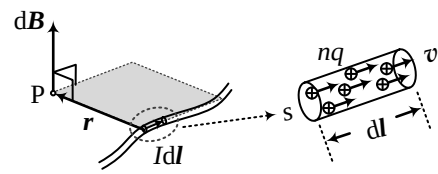


图 12.22 运动电荷产生的磁场公式的推导

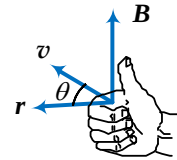


图 12.23 $q > 0$ 时，
 $\mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{r}$ 成右手螺旋关系

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (12.27)$$

当 $q > 0$ 时，场强的方向与“ $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ ”的方向相同，即垂直于 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{r}$ 组成的平面，且与 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{r}$ 成右手螺旋关系，如图 12.23 所示。式 (12.27) 就是运动电荷激发的磁感应强度的计算公式。

例 12.3 如图 12.24 所示，一半径为 R 的均匀带电薄圆盘，其电荷面密度 $\sigma > 0$ 。当圆盘绕通过其中心并与盘面垂直的轴，以角速度 ω 转动时，试求圆盘中心 O 点处的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 。

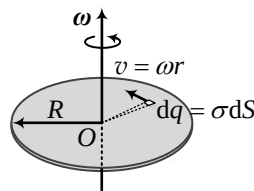


图 12.24 例 12.3 图

解：在圆盘上任取一个面积为 $dS = r dr d\theta$ 的电荷元，则该电荷元所带的电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

它随圆盘转动时的线速度为 $v = r\omega$ 。由运动电荷的场强公式，可得电荷元在圆心 O 处产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{v dq \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{r\omega \cdot \sigma r dr d\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \omega \sigma r dr d\theta$$

当 $\sigma > 0$ 时，方向沿转轴向上（与角速度 ω 的方向相同）。所以圆心处的总磁感应强度的大小为

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \omega \sigma r dr d\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R$$

方向沿转轴向上。

注：整个带电圆盘也可以看成是由许多圆环组成的集合。半径为 r ，宽度为 dr 的带电圆环绕其中心轴转动时就形成了一个等效圆电流 $dI = \frac{\omega}{2\pi} dq$ （称为运流电流），式中 dq 为该圆环所带的电量，然后可用圆电流的场强公式来计算。请读者试着用这种方法完成计算。

§ 12.4 真空中稳恒磁场的基本定理

与点电荷产生的静电场极为类似，决定电流元激发的磁感应强度的毕奥-萨伐尔定律有着与距离成平方反比的空间分布规律，这也决定了稳恒电流的磁场与静电场一样，同样可以用高斯定理和环路定理来描述磁场的性质。本节我们首先介绍由法拉第提出的磁力线的概念，然后再讨论磁场的高斯定理和环路定理及其应用。

12.4.1 磁感应线

在稳恒磁场中，不同场点处磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小和方向一般不相同，但对于磁场中某个确定的场点而言， $\mathbf{B}$ 的大小与方向是确定而唯一的。为了形象地描述磁场在空间的分布

情况，仿照引入电场线的方法，我们用一系列的曲线来描述磁场的空间分布，这些曲线被称为**磁感应线**（magnetic induction line）（又称**磁力线**），规定曲线上任一点的切线方向就是该点处磁感应强度 B 的方向，而空间任意点处磁感应线的疏密程度则反映了该处磁场的强弱。图 12.25 中描绘了几种典型的载流导线在某一平面内的磁感应线的分布情况。

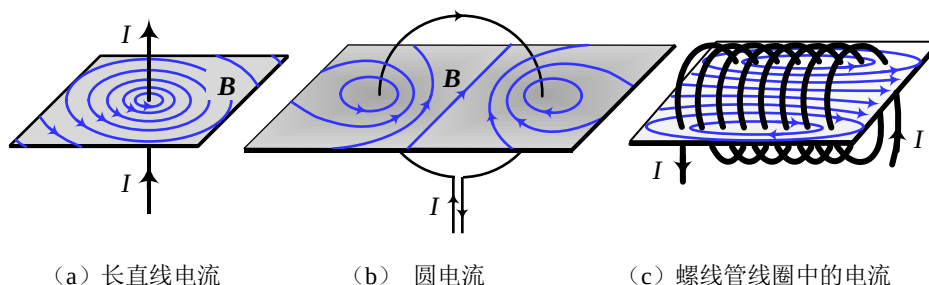


图 12.25 各种电流的磁感线

通过观察以上几种电流所产生的磁感应线的分布，可以看出磁感应线的分布有如下几个特点：

1. 所有磁感应线均为闭合曲线，既无起点，也无终点；
2. 对于一个给定的磁场分布，空间任一点的磁感应强度的方向是确定的，任何两条磁感应线不会相交；

3. 电流方向与其激发的磁场的磁感应线的方向符合右手螺旋法则，即：若用右手大拇指代表电流方向，则右手其余四指自然弯曲的指向即表示磁感应线的方向；反之，若用右手大拇指代表磁感应线的方向，则右手其余四指自然弯曲的指向即表示电流的方向。因此，人们通常采用右手螺旋法则来判断电流所产生的磁场的方向，如图 12.26 所示。

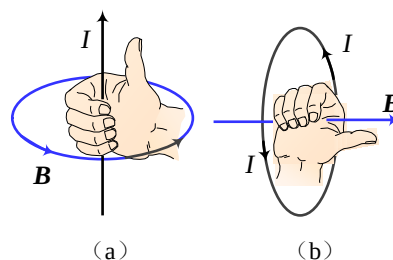


图 12.26 右手螺旋法则

12.4.2 磁通量

为了使磁感应线既能描述磁场的方向，还能描述磁场的强弱，对磁感应线的密度作如下规定：在磁场中某点处，通过与磁场方向垂直的单位面积上的磁感应线的根数就等于该点处磁感应强度的大小，即

$$B = \frac{dN}{dS_{\perp}} \quad (12.28)$$

可见 B 大的地方，磁感应线较密集； B 小的地方，磁感应线较稀疏。对于均匀磁场，磁感应线相互平行，且各处场线密度均匀；对于非均匀磁场，各条磁感应线不平行，各处磁感应线的密度不均匀。

我们将磁场中通过某个曲面的磁感应线的根数，称为通过该曲面的**磁通量**（magnetic

flux), 用 Φ_m 表示。

对于均匀磁场中的一个平面 S , 当磁场方向与该平面的法线方向的夹角为 θ 时, 如图 12.27 (a) 所示, 通过该平面的磁通量为

$$\Phi_m = BS \cos \theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (12.29)$$

而对于非均匀磁场中的一个任意曲面 S , 如图 12.27 (b) 所示, 为了求出通过该曲面的磁通量, 我们首先在该曲面上任意取一个非常小的面元: $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, 其中

$\mathbf{n}$ 为该面元的法向单位矢量, 通过该面元的磁通量记为

$$d\Phi_m = B \cos \theta dS = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.30a)$$

于是, 通过整个曲面 S 的总磁通量为

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \iint_S B \cos \theta dS = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.30b)$$

式 (12.30) 就是计算磁通量的基本公式。由磁通量的计算式可以看出, 磁通量是一个有正负之分的标量。当面元的法线方向与该处磁场方向之间的夹角 $\theta < 90^\circ$ 时, 通过该面元的磁通量为正, 当于夹角 $\theta > 90^\circ$ 时, 磁通量为负。

在国际单位 (SI) 制中, 磁通量的单位为韦伯 (wb), 即 $1\text{wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$ 。

例题 12.4 在一根“无限长”载流直导线旁, 有一个与直导线共面的矩形回路, 其中回路的 ab 边与长直导线平行, 矩形回路的尺寸以及与直导线的位置关系如图 12.28 所示。当长直导线内通有电流 I 时, 试求通过矩形回路的磁通量。

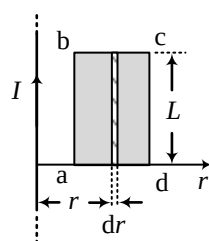


图 12.29 例 12.4 解图

解: 因为长直载流导线在导线外任意一点产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向垂直于矩形回路所在平面。为此在回路内距离导线为 r 处, 取一个长为 l 、宽为 dr 的面元 $dS = ldr$, 如图 12.29 所示。则通过该面元的磁通量为

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$$

所以通过整个矩形回路的磁通量为

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

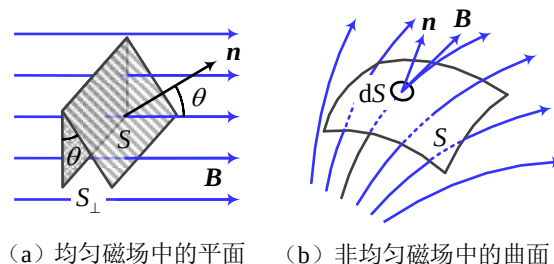


图 12.27 磁通量

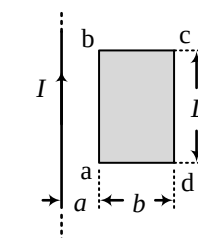


图 12.28 例 12.4 图

12.4.3 磁场的高斯定理

对于闭合曲面来说，闭合曲面上任意一个面积元的法线正方向 $\mathbf{n}$ 同常规定为从曲面内指向曲面外。这样，当磁感应线从曲面外穿进曲面内时，该处的磁通量为负（ $\theta > 90^\circ$ ），当磁感应线从曲面内穿出时，该处的磁通量为正（ $\theta < 90^\circ$ ），如图 12.30 所示。由于所有的磁感应线都是闭合曲线，有多少条磁感应线穿入闭合曲面，就有多少条磁感线穿出该曲面，所以由磁通量的物理意义可知，**磁感应强度对任意一个闭合曲面的磁通量必等于零**，即

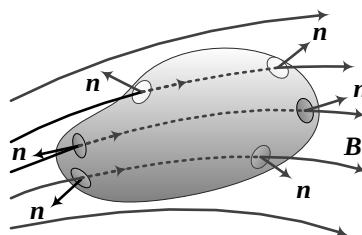


图 12.30 通过闭合曲面的磁通量

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (12.31)$$

上式就是**磁场的高斯定理**的数学表达式，它是描述磁场基本性质的重要定理之一，它不仅适用于磁铁、电流和运动电荷产生的稳恒磁场，也适用于变化的电场所激发的磁场（参见本书第 15 章 电磁场与电磁波）。

磁场的高斯定理与静电场的高斯定理 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$ 虽然形似，却有着本质的区别。

静电场的高斯定理表明静电场是有源场（或电场线是发散的）；磁场的高斯定理表明磁场是无源场，所有的磁感应线都是无头无尾的闭合曲线，即磁场是涡旋场，自然界不存在与电荷相对应的磁荷（或叫**磁单极**），所有的磁极总是成对出现的。所以静电场和磁场是两类不同性质的场。

12.4.4 真空中磁场的安培环路定理

在静电场中，由于静电场是有源的无旋场，即描述静电场分布的电场线都是发散的，不可能形成闭合曲线，所以电场强度 $\mathbf{E}$ 对于任意一个闭合回路的环流（或线积分）恒等于零，即： $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。而在磁场中，描述磁场分布的磁力线都是闭合曲线，即磁场是无源的涡旋场，所以磁感应强度 $\mathbf{B}$ 对于任意一个闭合回路的环流（即线积分）不一定为零。由毕奥-萨伐尔定律可以证明（此处从略）：**在真空中磁感应强度 $\mathbf{B}$ 对于任意一个闭合回路 L 的环流（即线积分）等于真空中的磁导率 μ_0 与该闭合回路 L 所包围的电流的代数和 $\sum I_i$** ，其数学表达式为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i \quad (12.32)$$

上式就是**真空中磁场的安培环路定理**（Ampere circuital theorem）。 $\sum I_i$ 中的电流是取正值还是取负值，要依据电流穿过闭合回路时的方向与回路的绕行方向是否符合右手螺旋关系而定：若符合则 I 取正值，否则 I 取负值。

式(12.32)表达了电流与它所激发的磁场之间的普遍规律,它说明了磁场的一个普遍性质,即磁场是涡旋场,或者说磁场是非保守力场。

值得注意的是:① 表达式(12.32)中的 $\mathbf{B}$ 是空间所有电流产生的总磁感应强度,但 $\sum I_i$ 仅仅指穿过闭合回路的电流的代数和,与闭合回路外的电流无关;② 即使 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 等于零,仅仅表明穿过回路的电流的代数和为零,但回路 L 上任一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 不一定等于零;③ 该定理仅适用于稳恒电流所产生的磁场(对于非稳恒电流情况,则要用全电流的安培环路定律,参见本书第15章 电磁场与电磁波)。

对于电流连续分布的载流体情形,安培环路定律可表示为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.33)$$

式中的 $\mathbf{j}$ 是以闭合回路 L 为边界的曲面 S 上的电流密度, S 是以闭合回路 L 为边界的任意曲面。

12.4.5 安培环路定理的应用

利用安培环路定理可以很简便地求出某些具有一定对称分布的电流产生的磁场分布。其方法是:先依据电流分布的对称性分析磁场分布的对称性;然后适当选取积分回路,选取积分回路的关键是:使回路上任一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小相等,或者使回路的某一部分上 $\mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{l}$ 垂直,使得 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$,以便使 $\mathbf{B}$ 能够从积分式 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 中作为常数提出来。最后确定回路所包围的电流的代数和 $\sum I_i$,并由 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 求 $\mathbf{B}$ 的大小。下面举例说明磁场的安培环路定理的应用。

例 12.5 如图 12.31 所示,一根半径为 R 的“无限长”载流直圆柱形导体,电流 I 沿轴向流动,且在圆柱体的横截面上均匀分布。试求圆柱体内外磁感应强度的分布。

对称性分析: 由于电流在圆柱形导体的横截面上均匀分布,所以电流及其产生的磁场分布都具有“无限长”的轴对称性,即在与圆柱体垂直的任意一个截面内,在任意半径为 r 的同轴圆的圆周上,各点磁感应强度的大小均相等,方向与圆柱体上的电流方向成右手螺旋关系。实际上该圆周就是一根磁感应线。

解: 在垂直于圆柱体的截面内,取一个半径为 r 的同轴圆周作为闭合回路,其绕行方向与磁感线的方向一致,由安培环路定理 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$,可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos 0^\circ = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 \sum I_i$$

即

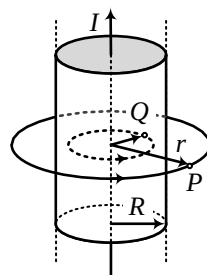


图 12.31 无限长载流直圆柱体内外的场强分布

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum I_i$$

当 $r \geq R$ ，即考察的场点 P 在圆柱体外部时， $\sum I_i = I$ ，代入上得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

当 $r < R$ ，即考察的场点 Q 在圆柱体内部时， $\sum I_i = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$ ，得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (0 < r < R)$$

B 的方向沿圆周的切线方向，并与圆柱体上的电流 I 成右手螺旋关系。

例 12.6 如图 12.32 所示为一个截面半径为 R 的载流密绕长直螺线管线圈，沿螺线管轴线单位长度上的线圈匝数为 n ，线圈内通有电流 I ，方向如图所示。试求螺线管内磁感应强度的分布。



图 12.32 例 12.6 图

对称性分析：螺线管内、外任意一点的磁场是每一匝线圈（相当于一个圆电流）产生的磁感应强度 B 的矢量和，根据电流线与磁感线之间的右手螺旋关系，可知管内磁场的方向沿螺线管的轴线方向；管外远离两端口的磁场很微弱，可忽略不计；两端管口处存在端口效应，在此不予讨论。

解：如图 12.33 所示为上述载流密绕长直螺线管的剖面图。过管内任意一点 P 作一个长为 L 的矩形回路 $abcd$ ，其中 ab 边与轴线平行， cd 边在螺线管的外面。由场强分布的对称性可知， ab 边上各点的磁感应强度的大小相同，方向从 a 指向 b ，而且此回路所包围的电流 $\sum I_i = n \cdot \overline{ab} \cdot I = nLI$ 。由

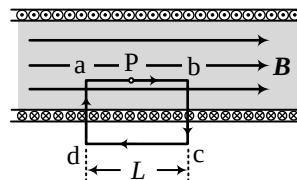


图 12.33 长直载流螺线管内的场强分布

安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，我们有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 nLI$$

对于 $\overline{ab}$ 段，因 $d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{B}$ 方向相同，且各点处 $\mathbf{B}$ 的大小相同，所以 $\int_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot \overline{ab} = BL$ ；

对于 $\overline{cd}$ 段，因 $\mathbf{B} = 0$ ，所以 $\int_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；

对于 $\overline{bc}$ 和 $\overline{da}$ 段，因 $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ ，所以 $\int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ；

最后整理可得

$$B = \mu_0 n I \quad (12.28)$$

方向沿螺线管的轴线方向，并与线圈中的电流成右手螺旋关系。

计算结果表明，载流长直密绕螺线管内的磁感应强度与 P 点的位置无关，且方向一致，

因此螺线管内的磁场为一匀强磁场。

例 12.7 试求：载流密绕螺绕环内磁感应强度的分布。

已知螺绕环线圈的总匝数为 N ，线圈中的电流为 I ，环的内、外半径分别为 R_1 和 R_2 ，如图 12.34 所示。

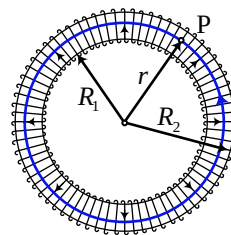


图 12.34 例 12.7 图

对称性分析：紧密缠绕着导线的环形管线圈称为**螺绕环**。因环上的线圈密绕，线圈通有电流时，产生的磁场几乎全部集中在环内，环外磁场几乎为零。由对称性分析可知，环内的磁感应线为一系列同轴圆，同一圆周上各点 $\mathbf{B}$ 的大小相等，方向均沿圆周的切线方向，并与线圈中的电流成右手螺旋关系。

解：为求环内任意一点 P 处磁感应强度的大小，取一个通过 P 点、半径为 r 的同轴圆作为闭合回路，其绕向与通过 P 点的磁感应线的方向相同。由安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，可得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

所以螺绕环内任意一点处的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在环外，因 $\sum I_i = 0$ ，所以 $B = 0$ 。

计算结果表明，螺绕环内的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 与 P 点的位置有关，即螺绕环内的磁场为非均匀磁场，且 $\mathbf{B}$ 的大小与 r 成反比。但如果螺绕环很细、截面很小，则 $r \approx R$ ，此时

$$B \approx \frac{\mu_0 N}{2\pi R} I \approx \mu_0 n I$$

因此可认为细螺绕环内各处的磁场大小近似相等。式中 $n = N/2\pi R$ 为细螺绕环单位长度上线圈的匝数。

§ 12.5 磁场对电流的作用

稳恒磁场所满足的毕奥-萨伐尔定律，磁场的高斯定理，安培环路定理反映了电流与磁场间相互关系的一个方面，即电流的磁效应；本章将研究其另一方面，即磁场对电流的作用规律及其特点。

文档 12.2 电磁炮

12.5.1 定培定律

安培于 1820 年，做了大量实验，通过分析实验结果，安培总结出磁场对电流的作用规律：**磁场对电流元 Idl 的作用力 dF 的大小与电流元的大小 Idl 成正比、与电流元所在位置处磁感应强度的大小 B 以及电流元 Idl 与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 之间夹角 θ 的正弦成正比**，在国际单位

制 (SI) 中, 其数学表达式为

$$dF = BIdl \sin \theta \quad (12.29)$$

dF 的方向与矢量积 $Idl \times B$ 的方向一致, 即垂直于 Idl 与 B 组成的平面, 并与 Idl 和 B 满足右手螺旋关系, 如图 12.35 所示。这一规律称为**安培定律** (Ampere law)。载流导线在磁场中受到的磁场力通常被称为**安培力**。安培定律的矢量表达式为

$$dF = Idl \times B \quad (12.30)$$

顺便指出: 电流元所受的安培力的方向也可以用高中物理中学过的**左手定则**来判断。

对于任意形状的载流导线在磁场中受到的安培力, 应等于个电流元受到的安培力的矢量和, 可以通过沿载流导线作线积分来计算, 即

$$F = \int_L dF = \int_L Idl \times B \quad (12.31)$$

应该指出: 上述线积分是矢量积分。在实际计算时, 应首先建立一个恰当的直角坐标系, 求出任意电流元所受的安培力在各坐标轴上的分量: dF_x 、 dF_y 、 dF_z , 再对各分量式求线积分, 即:

$$F_x = \int_L dF_x, \quad F_y = \int_L dF_y, \quad F_z = \int_L dF_z \quad (12.32)$$

于是载流导线受到的总的安培力为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (12.33)$$

例 12.8 电流为 I , 半径 R 的半圆形载流导线处于均匀磁场 B 中, B 的方向垂直于导线所在平面, 如图 12.36 所示。试求: 半圆形载流导线所受的安培力。

解: 以圆心 O 为坐标原点, 建立如图 12.37 所示的直角坐标系 $O-xyz$, 其中 z 轴垂直纸面向外。在半圆形导线上任取一个电流元 Idl , 因 $Idl \perp B$, 所以该电流元受安培力 dF 的大小为

$$dF = BIdl \sin 90^\circ = BIdl$$

方向沿电流元的所在位置的径向方向。不难看出, 半圆弧上不同的电流元其受力方向不同。为此, 需将 dF 沿给定的坐标轴进行正交分解。不难看出, dF 在 x 、 y 轴上的分量分别为

$$dF_x = dF \cos \alpha = BI \cos \alpha dl$$

$$dF_y = dF \sin \alpha = BI \sin \alpha dl$$

又由图可知: $dl = R d\alpha$, 所以

$$F_x = \int dF_x = \int_0^l BI \cos \alpha dl = \int_0^\pi BIR \cos \alpha d\alpha = 0$$

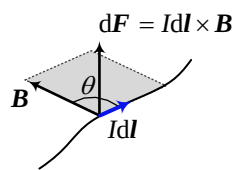


图 12.35 安培定律

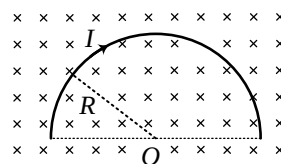


图 12.36 例 12.8 图

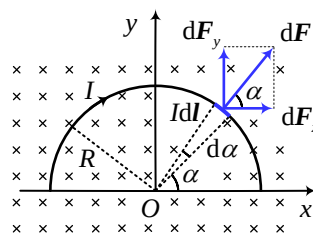


图 12.37 例 12.8 解图

$$F_y = \int dF_y = \int_0^l BI \sin \alpha dl = \int_0^\pi BIR \sin \alpha d\alpha = 2RBI$$

该半圆形载流导线所受安培力为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = 2RBI \mathbf{j}$$

不难看出,该半圆形载流导线在均匀磁场中受到的安培力与在导线的起点和终点之间长为 $2R$ 、通有相同电流 I 的载流直导线受到的安培力相同。可以证明,这个结论具有普适性:即在匀强磁场中任意形状的一段载流导线所受的安培力,等效于在该导线的起点和终点之间的一根载流直导线在同一磁场中所受的安培力。

从上述结论还可以进一步推证:在均匀磁场中,任意一个闭合的载流导线受到的安培力一定等于零。

12.5.2 无限长平行载流直导线间的相互作用

电流能产生磁场,磁场又能对电流产生作用力。因此,载流导线之间存在磁相互作用。

如图 12.38 所示,假设真空中有两根相互平行的“无限长”载流直导线 ab 和 cd , 相距为 d , 分别载有同方向的电流 I_1 和 I_2 。则导线 ab 上的电流在导线 cd 上产生的磁感应强度 B_{12} 的大小为

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

方向垂直于 ab 与 cd 构成的平面向下。于是,根据安培定律,在导线 cd 上的任一电流元 $I_2 dl$ 受到的安培力 $d\mathbf{F}_2$ 的大小为

$$dF_2 = B_{12} I_2 dl \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl$$

方向垂直指向导线 ab 。

显然,载流导线 cd 上各电流元受力的大小和方向与上述电流元完全相同,所以导线 cd 单位长度上所受的安培力的大小为

$$F_2 = \frac{dF_2}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (12.34)$$

同理,导线 ab 单位长度上所受的安培力的大小也为 $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$, 方向与 F_2 相反,垂直指向导线 cd 。

上述分析表明,当两根载流直导线通有同向电流时相互吸引。不难理解,如果两直导线上通有反向电流则互相排斥。

在 SI 单位制中,电流的国际单位“安培”就是利用两根相互平行的载流长直导线所受的力来规定的:真空中相距为 1 米,并载有相等电流的两无限长直平行导线,当一根导线上

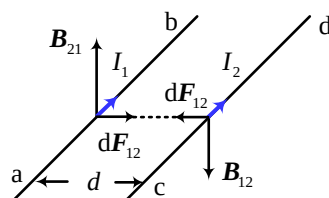


图 12.38 两根长直平行载流导线之间的相互作用

每米长度所受的安培力为 2×10^{-7} 牛顿时，这时导线中的电流强度规定为 1 安培 (A)。

根据上述规定，我们还可以导出真空中的磁导率。将 $d = 1\text{m}$ ， $I_1 = I_2 = 1\text{A}$ ，

$$F_2 = \frac{dF_2}{dl} = 2 \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \text{代入式 (12.34)，可得真空磁导率为}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$$

这表明，真空中的磁导率是一个具有单位的导出量。

12.5.3 均匀磁场对载流线圈的作用

假设有一刚性矩形载流线圈 $abcd$ ，边长分别为 l_1 和 l_2 ，通有电流 I ，放置于磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀外磁场中，如图 12.39 所示。设线圈平面的法线方向 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的夹角为 θ ，线圈平面与 $\mathbf{B}$ 的夹角为 φ ， ab 、 cd 边均与磁场垂直。由安培定律可得线圈上各边所受安培力的大小分别为

$$F_{ab} = F_{cd} = Il_2 B \sin 90^\circ = Il_2 B$$

$$F_{bc} = Il_1 B \sin \varphi$$

$$F_{da} = Il_1 B \sin(\pi - \varphi) = Il_1 B \sin \varphi$$

方向分别如图 12.39 (a) 所示。其中， $\mathbf{F}_{bc}$ 与 $\mathbf{F}_{da}$ 大小相等，方向相反，且在同一直线上，因而相互抵消； $\mathbf{F}_{ab}$ 与 $\mathbf{F}_{cd}$ 大小相等，方向相反，但不在同一直线上，

从而形成一对力偶，其力臂为 $d = l_1 \cos \varphi$ ，因此磁场对线圈有一个磁力矩的作用，其大小为

$$M = F_{ab} \cdot d = Il_2 B \cdot l_1 \cos \varphi = ISB \cos \varphi$$

式中 $S = l_1 l_2$ 为线圈面积。若线圈共绕有 N 匝，则

$$M = NISB \cos \varphi \quad (12.35)$$

若令 $\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{B}$ 夹角为 θ ，则 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ， $\cos \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ ，故有

$$M = NISB \sin \theta = P_m B \sin \theta \quad (12.36)$$

式中 $P_m = NSI$ 是线圈磁矩的大小。磁力矩 $\mathbf{M}$ 的方向与矢量积 $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$ 的方向相同。由于磁矩也是矢量，其方向就是线圈平面的法线方向，即

$$\mathbf{P}_m = NSI \mathbf{n} \quad (12.37)$$

所以，线圈在均匀磁场中受到的磁力矩的矢量表达式为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B} \quad (12.38)$$

虽然式 (12.36) - (12.37) 是从矩形平面线圈这一特例中导出的，但可以证明它对均匀

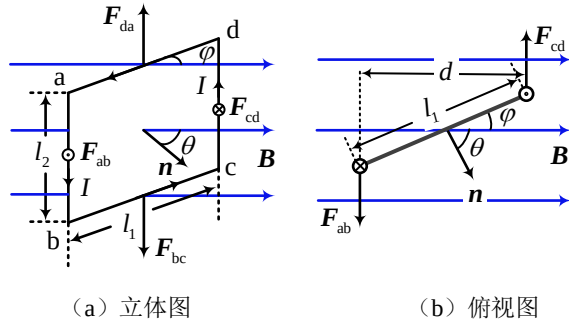


图 12.39 均匀磁场对载流线圈的作用

磁场中任意形状的载流平面线圈（如圆形、三角形、椭圆形等）均适用。

* 12.5.4 磁力和磁力矩的功

我们知道，载流导线或载流线圈在磁场中要受磁力或磁力矩的作用，在磁力或磁力矩的作用下，其运动状态会发生改变。这表明磁力或磁力矩要对载流导线或线圈做功。下面从两个特例出发，来推导磁力或磁力矩做功的一般表达式。

首先考察磁力的功。如图 12.40 所示，在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中由有一个矩形载流回路，其中磁场方向垂直于回路所在平面，bc、da 是两个固定的金属导轨，ab 段在导轨上可以左右平移。假设 ab 段的长度为 L ，回路中的电流为 I ，则作用于 ab 上磁力的大小为： $F_{ab} = IBL$ ，方向如图所示，当导线 ab 在磁力作用下产生一个元位移 $d\mathbf{x}$ 时，磁力做的元功为

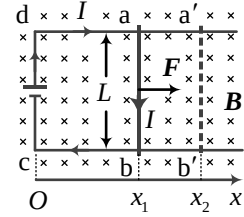


图 12.40 磁力的功

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = IBLdx = IBdS = I \cdot d\Phi \quad (12.39a)$$

若回路中电流 I 恒定不变，当导线从 ab 位置运动到 a'b' 位置时，磁力做的总功为

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} IBLdx = IBL(x_2 - x_1) = I \cdot \Delta\Phi \quad (12.39b)$$

在式 (12.39) 中， $d\Phi$ 或 $\Delta\Phi$ 是载流导线 ab 在运动过程中电流回路所围面积的磁通量的增量。

再来考察载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩做的功。如图 12.41 所示为一个单匝载流平面线圈，若线圈中电流为 I ，线圈面积为 S ，在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中，其所受的磁力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n}$ ($N=1$) 是线圈的磁矩，显然磁力矩的大小为

$$M = P_m B \sin \theta = ISB \sin \theta$$

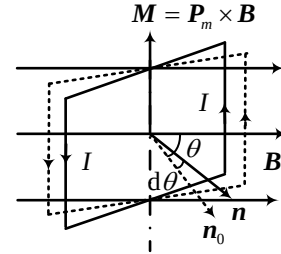


图 12.41 磁力矩的功

方向就是 $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$ 的方向，当线圈在磁力矩的作用下转过一个角位移 $d\theta$ 时，磁力矩所做的元功为

$$dA = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = -Md\theta = -ISB \sin \theta d\theta = I \cdot d(SB \cos \theta) = I \cdot d\Phi \quad (12.40a)$$

式中 $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta$ 是通过线圈平面的磁通量。

当载流线圈在磁力矩的作用下，其法线方向与磁场的夹角由 θ_1 转到 θ_2 时，同时保持线圈中的电流 I 恒定不变，则磁力矩所做的总功为

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \cdot d(SB \cos \theta) \\ &= I(SB \cos \theta_2 - SB \cos \theta_1) = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot \Delta\Phi_m \end{aligned} \quad (12.40b)$$

式中 Φ_1 和 Φ_2 分别对应于线圈在角度 θ_1 和 θ_2 时通过线圈的磁通量, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ 是线圈在转动过程中通过线圈的磁通量的增量。

比较式 (12.39) 和式 (12.40) 可知, 当电流 I 恒定不变时, 无论是作用于载流导线上的磁力做的功, 还是作用于载流线圈上的磁力矩做的功都可以表示为通过回路的电流 I 与通过回路所围面积的磁通量的增量 $\Delta\Phi$ 的乘积, 即

$$dA = I \cdot d\Phi \quad \text{或} \quad A = \int dA = I \cdot \Delta\Phi \quad (12.41)$$

不难证明, 如果线圈的总匝数为 N , 则磁力矩所做的功为

$$dA = NI \cdot d\Phi \quad \text{或} \quad A = \int dA = NI \cdot \Delta\Phi \quad (12.42)$$

例 12.9 如图 12.42 所示, 半径为 R , 通有恒定电流为 I 的载流圆环, 处在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中。开始时, 线圈平面的法线方向沿 z 轴正方向, 并与磁场方向垂直。试求:

- (1) 载流圆环受到的安培力;
- (2) 载流圆环在起始位置时受到的磁力矩;
- (3) 当载流圆环的法线方向由 $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$ 的初始位置转到 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$ 的平衡位置时, 磁力矩所做的功。

解: (1) 由于载流圆环处在均匀磁场中, 所以载流圆环所受的总的磁力为零。

(2) 在起始位置, $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$, 即 $\theta = \pi/2$, 由 $\mathbf{M} = \mathbf{P}_m \times \mathbf{B}$, 可知磁力矩的大小为

$$M = ISB \sin \theta = \pi R^2 IB$$

方向与 $\mathbf{n} \times \mathbf{B}$ 的方向相同, 即沿图中 y 轴正方向。

(3) 载流圆环在初始位置时, $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$, $\Phi_1 = 0$; 在 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{B}$ 的平衡位置时, $\Phi_2 = B \cdot \pi R^2$, 所以在圆环的转动过程中, 磁力矩所做的功为

$$A = I \cdot \Delta\Phi = I \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot (B\pi R^2 - 0) = \pi R^2 IB$$

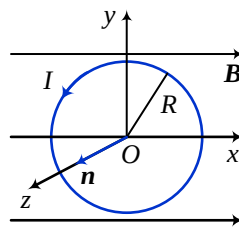


图 12.42 例 12.9 图

§ 12.6 带电粒子在均匀电场和磁场中的运动

12.6.1 洛伦兹力

实验发现, 电量为 q 的带电粒子, 当它以速度 $\mathbf{v}$ 进入磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 磁场中时, 也会受到来自磁场的一种作用力, 其大小为

$$F_m = qvB \sin \theta \quad (12.43)$$

式中 θ 是运动电荷的速度方向与磁场方向之间的夹角。当 $q > 0$ 时, 力的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相同, 这种力被称之为洛伦兹力。洛伦兹力的矢量表达式为

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.44)$$

由于导体中的电流是由大量自由电荷的定向运动形成的,因此载流导体在磁场中受到的安培力,本质上来自于磁场对于运动电荷的洛伦兹力。这是因为金属导体中的自由电子在磁场中作定向漂移时,受到磁场的洛伦兹力的作用,并不断地与导体的晶格点阵发生碰撞,将这种作用力传递给导体,从而在宏观上表现为载流导体在磁场中受到的安培力。

下面,我们从安培定律出发,导出运动电荷在磁场中受到的洛伦兹力表达式(12.44)。

在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的磁场中,在载流导体上任取一个长为 $d\mathbf{l}$, 截面积为 s 的电流元 $I d\mathbf{l}$, 由安培定律,其所受的安培力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

若导线中自由电荷的密度为 n , 每个自由电荷的电量为 q (不妨设 $q > 0$), 自由电荷的平均定向漂移速度为 $\mathbf{v}$, 则 $I d\mathbf{l} = q n v s d\mathbf{l} = q (n s d\mathbf{l}) \mathbf{v}$, 将此代入上式, 可得

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = q (n s d\mathbf{l}) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

由于该电流元内共有 $dN = n s d\mathbf{l}$ 个定向运动的自由电荷, 则每个运动电荷受到的磁场力为

$$\mathbf{F}_m = d\mathbf{F} / dN = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

这就是磁场对运动电荷的洛伦兹力公式。

由于洛伦兹力 $\mathbf{F}_m$ 的方向与运动电荷的速度方向垂直, 即 $\mathbf{F}_m \perp \mathbf{v}$, 所以 $\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = 0$ 。这表明, 洛伦兹力做功的功率为零, 或者说洛伦兹力对运动电荷不做功。

12.6.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

由上节可知, 当电量为 q , 质量为 m 的一个带电粒子, 以速度 $\mathbf{v}$ 在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中运动时, 所受洛伦兹力为

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

该带电粒子在磁场中的运动情况将取决于它的运动方向与磁场方向之间的夹角。下面分三种情况进行分析。

(1) 当 $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ 时, $\theta = 0$

$$F_m = q v B \sin \theta =$$

此时, 带电粒子在均匀磁场中作匀速直线运动。

(2) 当 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ 时, $\theta = \pi/2$

$$F_m = q v B \sin \frac{\pi}{2} = q v B$$

为一恒量, 又因 $\mathbf{F}_m$ 与速度 $\mathbf{v}$ 处处垂直, 所以带电粒子将在均匀磁场中作匀速率圆周运动, 洛伦兹力充当了它所需的向心力, 如图 12.43 所示。设带电粒子作圆周运动的半径为 R , 由牛顿第二运动定律, 有

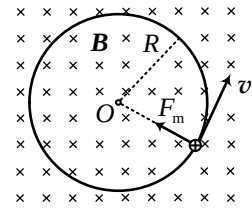


图 12.43 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ 时, 运动电荷在磁场中作圆周运动

$$qvB = mv^2/R$$

由此可得带电粒子的运动半径为

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (12.45)$$

作圆周运动的周期 T 为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.46)$$

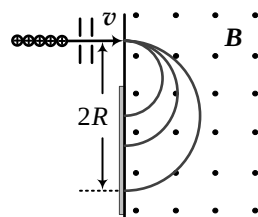


图 12.44 质谱仪的工作原理

式 (12.45) 表明, 当一束电量 q 相同, 但质量 m 各异的带电粒子, 以相同的速度 v 在同一位置、沿同一方向垂直射入磁感应强度 B 为均匀磁场中时, 这些粒子的运动半径各不相同, 在磁场中将不同的圆周作匀速圆周运动。如图 12.34 所示, 若在 AB 处放置一照相底片, 则可测得不同质量的带电粒子的轨道半径 R , 从而可以算出各个不同粒子的荷质比:

$\frac{q}{m} = \frac{RB}{v}$ 。此即所谓质谱仪的工作原理。

3. 当 v 与 B 成任意夹角 θ 时

可将 v 分解为平行于 B 的分量 $v_{\parallel}$ 和垂直于 B 的分量 $v_{\perp}$, 即

$$v_{\parallel} = v \cos \theta, \quad v_{\perp} = v \sin \theta$$

由上述讨论可知, 如果只有沿磁场方向的速度分量 $v_{\parallel}$, 运动电荷在磁场中将作匀速直线运动; 如果只有垂直于磁场方向的速度分量 $v_{\perp}$, 运动电荷将在磁场中在垂直于磁场的平面内作匀速圆周运动。根据运动的叠加原理, 当带电粒子的这两种运动同时存在时, 其实际的运动轨迹是一条螺旋线, 如图 12.45 所示, 其螺旋半径、螺旋周期和螺距分别为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (12.47)$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.48)$$

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \theta \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.49)$$

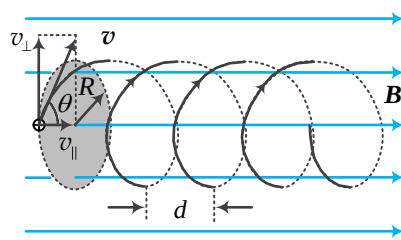


图 12.45 带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动

带电粒子在磁场中的螺旋运动在磁聚焦中

有重要应用。在阴极射线管或电子示波器中, 由阴极发射的电子束经加速电压加速后以几乎相同的速度从某点 A 射出, 但是有一个比较小的发散角, 因此如果没有经过聚焦调节, 从 A 点射出的电子束打在显示屏上时不是一个点, 而是一个斑。如果在电子束原来的速度方向上加上一个均匀的外磁场, 如图 12.46 所示, 由于发散角很小, 且速度 v 几乎相等, 所以

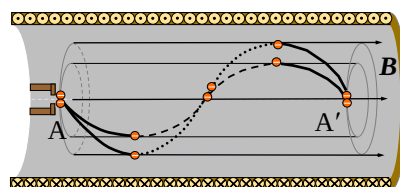


图 12.46 磁聚焦

$$v_{\parallel} = v \cos \theta \approx v, \quad v_{\perp} = v \sin \theta$$

由式(12.47) — (12.49)可知,不同的电子将沿半径不同的螺旋线运动,但螺距和周期相同。因此经过一个螺距或经历一个周期时间后它们又重新汇聚在A'点,这与光线通过透镜后的聚焦现象有些类似,故称为**磁聚焦**(magnetic focusing)。由于均匀磁场是由长直螺线管线圈产生的。这样的装置称为**磁透镜**(magnetic lens)。实际上用的较多的是由短螺线管线圈产生的非均匀磁场的聚焦作用,这样的螺线管线圈通常被称为**短磁透镜**,被广泛应用于电子显微镜中。

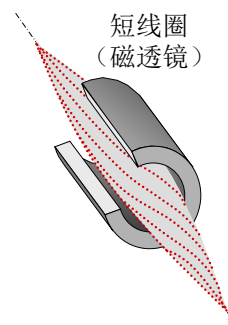


图 12.47 磁透镜

例 12.10 有一电子在磁感应强度 B 为 $1.5 \times 10^{-3} \text{T}$ 的均匀磁场中作螺旋线运动, 已知螺旋线的半径 $R = 10 \text{ cm}$, 螺距 $h = 20 \text{ cm}$, 电子的荷质比 $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ 。求电子运动的速度 v 与磁感应强度 B 的夹角 θ 和电子运动速度的大小。

解: 因电子的运动半径和螺距分别为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} \quad \text{和} \quad h = Tv_{\parallel} = \frac{2\pi m}{eB} v \cos \theta$$

两式相除, 得

$$\tan \theta = \frac{2\pi R}{h}$$

将已知量代入, 得 v 与 B 的夹角为

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\pi R}{h} = \tan^{-1} \frac{2\pi \times 10 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}} = 72.3^\circ$$

所以电子运动速度的大小为

$$v = \frac{eRB}{m \sin \theta} = 1.76 \times 10^{11} \times \frac{10 \times 10^{-2} \times 1.5 \times 10^{-3}}{\sin 72.3^\circ} = 2.8 \times 10^7 \text{ m/s}$$

12.6.3 带电粒子在均匀电场和磁场共存空间中的运动

如果质量为 m 、电量为 q 的粒子在均匀电场和均匀磁场共同存在的空间中以速度 v 运动, 带电粒子将受电场力 $F_e = qE$ 和磁场力(洛仑兹力) $F_m = qv \times B$ 的共同作用, 其所受合力为 $F = F_e + F_m$, 相应的动力学方程为

$$F = q(E + v \times B) = m \frac{dv}{dt} \quad (12.50)$$

上式表明, 利用外加电场和外加磁场可以控制带电粒子的运动。这在电子示波管、电子显微镜、各类加速器等许多科学技术领域中得到了广泛应用。

1、速度选择器

在科学研究中，常常需要获得具有确定速度的带电粒子。但一般的离子源发射出的带电粒子通常具有各种不同的速度，因此人们利用带电粒子在均匀电场和磁场中的运动规律，设计出一种能够选择具有确定速度的带电粒子的装置，称为**速度选择器**，其工作

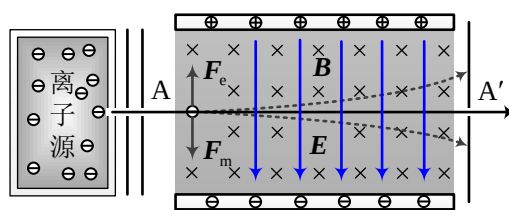


图 12.48 速度选择器

原理如图 12.48 所示。从离子源射出的带电粒子，经过加速准直后以不同的速度沿相同的方向射入到一个均匀电场和磁场共存的区域。假设该区域中，电场强度的大小为 E ，磁感应强度的大小为 B ，两者的方向互相垂直，如图中所示。当质量为 m 、电量为 q 的带电粒子，以速度 v 从 A 点沿垂直于电场和磁场的方向射入到该区域中时，带电粒子将同时受到电场力 $F_e = qE$ 和磁力（洛伦兹力） $F_m = qvB$ 的共同作用。由于这两个力的方向总是相反的，当两个力大小相等，即： $qE = qvB$ 时，这个带电粒子受到电磁力的合力为零，从而在均匀电场和磁场中做匀速直线定律。由此可知，能够从 A' 点射出的带电粒子，必定具有： $v = \frac{E}{B}$ 的速度。改变 E 或 B 的大小即可选择不同的速度。

2、霍尔效应

1879 年，美国物理学家霍尔（A. H. Hall, 1855—1938）在研究金属的导电机制时发现，将矩形载流导体薄板放入磁感应强度为 B 的均匀外磁场中，并使磁场方向垂直于导体薄板，如图 12.49 所示，则在与磁场方向和电流方向都垂直的两个导体表面 A_1 、 A_2 之间产生电势差，这种现象称为霍尔效应（Hall effect），其电势差称为霍尔电势差或霍尔电压。

实验表明，当磁场不太强时，霍尔电势差 U 与磁感应强度 B 及导体中的电流 I 成正比，与导体薄板的厚度 d 成反比，即

$$U = R_H \frac{IB}{d} \quad (12.51)$$

其中， R_H 称为霍尔系数，它由导体薄板的性质决定。

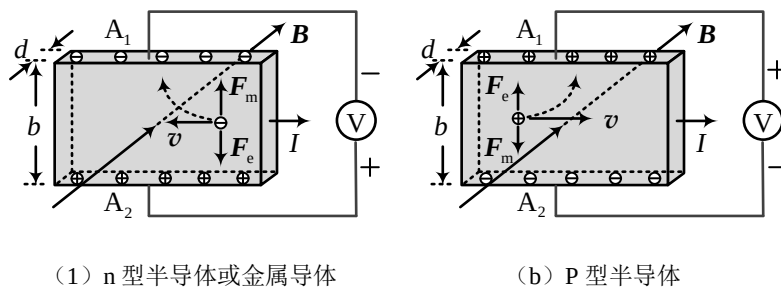


图 12.49 霍尔效应

霍尔现象可以用导体中的载流子在磁场中定向运动时因受到洛伦兹力的作用而产生的

横向漂移来解释。以金属导体为例，导体中的电流是导体中的自由电子在电场作用下作定向运动形成的，其定向运动的方向与导体中的电流方向相反，如图 12.49 (a) 所示。如果自由电子定向运动的平均速率为 $\bar{v}$ ，在垂直于电流方向上有一个外磁场 B ，则自由电子受到的洛伦兹力的大小为 $F_m = e\bar{v}B$ ，方向向上。在洛伦兹力的作用下，电子的运动轨迹向上偏转，从而使导体薄板的上表面积累负电荷，下表面积累正电荷，并同时在导体薄板的上、下两个表面之间产生方向向上的附加电场 $E = \frac{U}{b}$ ， U 是两个表面之间的电势差。于是自由电子在磁场中还将受到电场力 $F_e = eE$ 的作用，方向与洛伦兹力的方向相反。当洛伦兹力与电场力达到平衡，即 $F_m = F_e$ 时，有

$$e\bar{v}B = eE = e\frac{U}{b}$$

此时，电子不再有横向漂移运动，导体薄板上下两个表面之间的电势差就会达到恒定值，其大小为

$$U = \bar{v}bB \quad (12.52)$$

设导体中载流子（自由电荷）的密度为 n ，则导体中电流为 $I = ne\bar{v}bd$ ，于是有

$$\bar{v}b = \frac{I}{ned}$$

将此代入式 (12.52)，可得霍尔电势差为

$$U = \bar{v}bB = \frac{1}{ne} \cdot \frac{IB}{d} \quad (12.53)$$

比较式 (12.51) 和式 (12.53)，霍尔系数为

$$R_H = \frac{1}{ne} \quad (12.54)$$

上式表明，霍尔系数决定于导体中每个载流子（即自由电子）的电量 e 和浓度 n 。

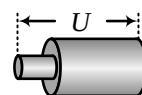
在半导体中，参与导电的载流子既有带负电的自由电子（电量为： $-e$ ），还有带正电的空穴（电量为： $+e$ ）。P 型半导体内的载流子主要是空穴，而 n 型半导体内的载流子主要是自由电子。简单分析可知，当导体中的电流方向和外磁场方向确定后，不论是带正电的空穴还是带负电的自由电子，载流子所受洛伦兹力的方向相同，在洛伦兹力作用下载流子的横向运动方向也相同，于是这两种半导体上霍尔电压的正负号不同，如图 12.49 所示。据此我们可以通过测定导体薄片上霍尔电压的正负号来判断半导体的种类。

由于半导体中的载流子浓度远小于金属中自由电子的浓度，因此利用半导体材料可以获得较大的霍尔电势差，所以常用半导体材料来制作霍尔传感器。利用霍尔效应，人们不仅可以用于测量磁场，还可以测量电流、转速，甚至压力物理量等。例如，在现代汽车中广泛应用的霍尔传感器有：ABS 系统中的速度传感器、汽车速度表和里程表、发动机转速及曲轴角速度传感器、各种用电负载的电流检测及工作状态的诊断、电子点火系统、各种开关的自

动控制等。目前，利用霍尔效应制作的传感器已经被广泛地应用于工业自动化技术、检测技术及信息处理等方面。

思考题

12.1 两根材料相同，截面积不同的圆柱形金属导体串联在一起，两端加恒定电压 U ，如图所示。试问这两根导体内的电流密度是否相同？导体内的电场强度是否相同？若两根金属导体的长度相同，两段导体上的电压是否相同？



思考题 12.1 图

12.2 截面相同的钨丝和铝丝串联，接在一电源上，问：

- (1) 通过钨丝、铝丝的电流密度是否相同？
- (2) 钨丝、铝丝内的电场强度是否相同？

12.3 在导体中，电流密度不为零（即 $\mathbf{j} \neq 0$ ）的地方，电荷体密度 ρ 可否等于零？

12.4 将电流元置于直角坐标系的坐标原点，其方向沿 Z 轴正向，则此电流元在 X 轴， Y 轴和 Z 轴上产生的 $d\mathbf{B}$ 的方向分别为_____，_____和_____。

12.5 你能说出一些有关电流元 $I d\mathbf{l}$ 激发磁场 $d\mathbf{B}$ 与电荷元 dq 激发电场 $d\mathbf{E}$ 的有何异同吗？

12.6 在某些电子仪器中，须将电流大小相等、方向相反的导线扭在一起，这是为什么？

12.7 在载流长直密绕螺线管内，为什么其端点处的磁感应强度大约是其中点处的磁感应强度的一半？

12.8 在恒定磁场中，下列说法中正确的是：

- (1) 安培环路定理具有普适性，它对求解具有对称性的某些磁场分布比较方便；
- (2) 安培环路定理可用来确定圆电流的磁场；
- (3) 在 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 中， $\mathbf{B}$ 仅与回路所围的电流有关；
- (4) 在 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 中，若 $\sum I_i = 0$ ，则回路上各点处的 $\mathbf{B}$ 为零。

12.9 试分析，在下面几种电流产生的磁场中，那些可以直接用安培环路定律求磁场，那些不能？为什么？

- (1) 有限长载流直导线的磁场分布；
- (2) 圆电流轴线上的磁场分布；
- (3) 两无限长同轴载流圆柱面（电流沿轴向流动，且在圆柱面上均匀分布）的磁场分布
- (4) 载流密绕螺绕环内的磁场分布；
- (5) 有限长载流密绕螺线管轴线上的磁场分布
- (6) 无限大均匀载流平面的磁场分布。

12.10 在均匀磁场中，有三个面积相等、电流相等的闭合载流回路，其中一个正方形、一个是圆形、还有一个是正三角形，试问它们受到的磁力是否相等、各为多少？它们受到的最大磁力矩是否相等？

12.11 在均匀磁场中，载流线圈所受的磁力矩与其取向有何关系？在什么情况下磁力矩最大？什么情况下磁力矩最小？载流线圈处于稳定平衡时，其取向又如何？载流线圈在磁力矩作用下的转动趋势如何？

12.12 一根有限长的载流直导线在均匀磁场中沿着磁感应线移动，磁力对它是否做功？

12.13 在洛伦兹力矢量表达式 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的三个矢量中，那些矢量之间始终是正交的？那些矢量之间可以有任意角度？

12.14 一电子以速度 v 射入磁感强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中，电子沿什么方向射入受到的磁力最大？沿什么方向射入不受磁力作用？

12.15 如果一个电子在通过空间某一区域时，电子运动的路径不发生偏转，我们能否说这个区域没有磁场？

12.16 试述如何用霍尔效应来测量汽车车轮的转速？

文档 12.3 第 12 章
习题答案

习 题

12.17 一同轴电缆，长 $L = 10.0\text{m}$ ，内半径 $r_1 = 1.0\text{mm}$ ，外半径 $r_2 = 8.0\text{mm}$ ，中间充满电阻率 $\rho = 1.00 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$ 的物质，若电缆两圆柱面电势差为 $U = 600\text{V}$ ，求其漏电电流。

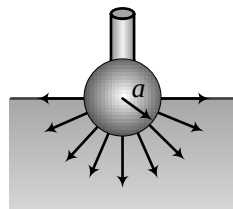
12.18 两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同心球壳，其间充满了电导率为 σ (σ 为常量) 的导电介质，若在两球壳间维持恒定电势差 U 。试求：

(1) 两球壳间的总电流；

(2) 两球壳之间，离球心为 r 处的电流密度。

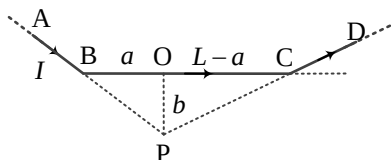
12.19 把大地看作电阻率为 ρ 的均匀导电介质。如图所示，用一半径为 a 的球形电极与大地表面相接，半个球体埋在地面下，电极本身的电阻可忽略不计，试证明此电极的接地电阻为

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$

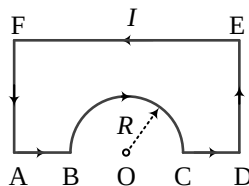


习题 12.19 图

12.20 一根通有电流 I 的长直载流导线被折成如图所示的形状，图中 P 点是直导线 AB 、 CD 延长线的交点。 P 到直导线 BC 的距离为 b ， $\overline{BC} = L$ ， $\overline{BO} = a$ 。试求图中 P 点处磁感应强度 B 的大小和方向。



习题 12.20 图



习题 12.21 图

12.21 将通有电流 I 的导线在同一平面内弯成如图所示的“矩形”状，其中 BC 段为半径为 R 的半圆弧， $AB = CD = R$ ， $DE = FA = 2R$ ， $EF = 4R$ 。试求圆心 O 点处磁感应强度 B 的大小和方向。

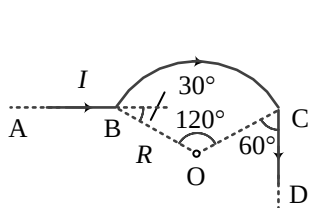
12.22 一根很长的载流直导线被弯曲成如图所示的形状，电流强度为 I ，其中圆弧的半径为 R ，且 AB 段与 CD 段互相垂直。试求圆心 O 处的磁感应强度。

12.23 如图所示，两根长直载流导线沿半径方向引到圆形铁环上的 A 、 B 两点，并在很远处与电源相连，构成一个闭合载流回路。试证明：铁环圆心处 O 点的磁感应强度为零。

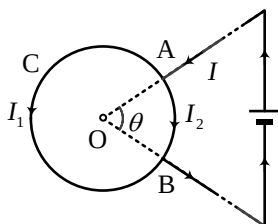
12.24 如图所示，一宽为 b 的“无限长”薄金属板，其上有均匀分布的电流 I 。

(1) 求薄板所在的平面上，距板边距离为 a 的 P 点的磁感应强度；

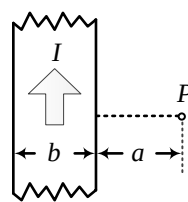
(2) 根据 (1) 中的结论证明, 当 $b \ll a$ 时, $B \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 。



习题 12.22 图



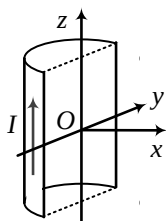
习题 12.23 图



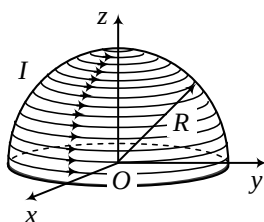
习题 12.24 图

12.25 如图所示, 一个半径为 R 的无限长半圆柱面载流导体, 沿轴线方向的电流 I 在半圆柱面上均匀分布。求半圆柱面轴线上任意一点 (即图中 O 点) 的磁感应强度。

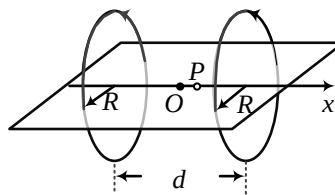
12.26 在一个半径为 R 、由塑料制成的半球面上有一个用细导线密绕的线圈, 各线圈平面彼此平行, 且以单层线圈覆盖整个半球面, 线圈的总匝数为 N 。当线圈中的电流为 I 时, 试求球心 O 处磁感应强度的大小。



习题 12.25 图



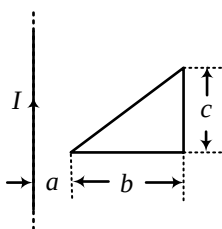
习题 12.26 图



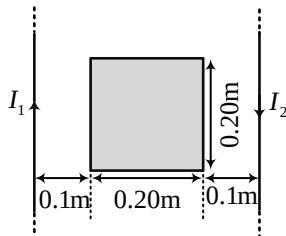
习题 12.27 图

12.27 实验室中常用所谓亥姆霍兹线圈在局部区域内获得一个近似均匀的磁场, 其装置如图所示。一对完全相同、彼此平行的圆线圈, 半径均为 R , 通过的电流均为 I , 匝数均为 N , 且两线圈中电流的流向相同。试证明当两线圈中心之间的距离 d 等于线圈的半径 R 时, 在两线圈中心连线的中点附近区域, 磁场可看成是均匀磁场。

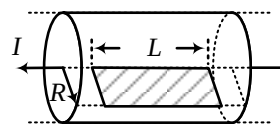
12.28 一长载流直导线所载电流为 I , 旁边放一个与其共面的直角三角形线圈, 其中两条直角边分别平行或垂直于载流直导线, 尺寸如图所示。试求通过此线圈的磁通量。



习题 12.28 图



习题 12.29 图



习题 12.30 图

12.29 两根平行长直导线, 相距 0.40m , 每根导线载有电流 $I_1 = I_2 = 20\text{A}$, 电流流向相反, 如图所示, 试计算通过图中正方形阴影部分面积的磁通量。

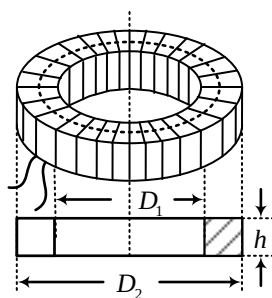
12.30 如图所示, 半径为 R 的长直导线上通有电流 I , 且电流在导线横截面上均匀分

布。试求：

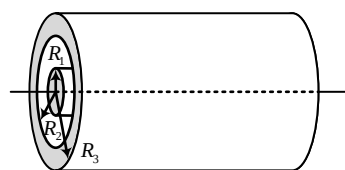
- (1) 导线内外磁感应强度的分布；
- (2) 通过图中导线剖面上长为 L 、宽为 R 的矩形阴影面积的磁通量。

12.31 一均匀密绕的矩形截面的螺绕环，尺寸如图所示，线圈的总匝数为 N 。当线圈中通有电流为 I 时，试求：

- (1) 环内磁感应强度的分布；
- (2) 通过螺绕环的横截面（图中阴影区）的磁通量。



习题 12.31 图



习题 12.32 图



习题 12.33 图

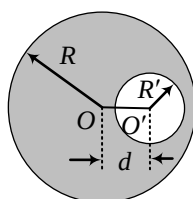
12.32 有一长直同轴电缆，其尺寸如图所示。内外导体中的电流均为 I ，但电流的流向相反。假设电流沿导线的横截面均匀分布，导体的磁性可不考虑。试计算导体内外各处的磁感应强度的分布，并画出 $B-r$ 曲线。

12.33 如图所示为一个垂直于纸面放置的无限大载流导体薄板，电流方向垂直纸面向外，在板内垂直于电流方向上单位宽度内的电流大小（即面电流的线密度）为 j 。试求无限大载流导体板周围磁感应强度的大小和方向。

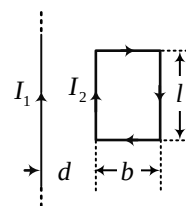
12.34 半径为 R 的“无限长”薄圆筒均匀带电，面电荷密度为 $\sigma > 0$ ，若圆筒以匀角速度 ω 绕轴转动，如图所示。求圆筒内的磁感应强度 B 的分布。



习题 12.34 图



习题 12.35 图



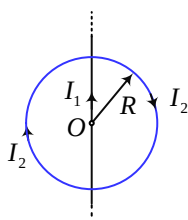
习题 12.36 图

*12.35 如图所示，在一根半径为 R 的无限长圆柱形载流直导体内部，有一个半径为 R' 的圆柱形空腔，空腔的轴线与导体的轴线平行，两者相距为 d 。假设电流 I 沿导体的轴向流动，并均匀分布在导体的横截面上。试求空腔内任意一点的磁感应强度的大小和方向。（提示：用补偿法和场强叠加原理来求解）

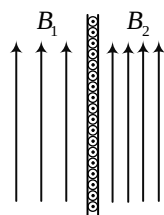
12.36 如图所示，一根长直导线载有电流 $I_1 = 30\text{A}$ ，与直导线共面的刚性矩形回路载

有电流 $I_2 = 20\text{A}$ 。已知 $d = 1.0\text{ cm}$ 、 $b = 8.0\text{ cm}$ 、 $l = 12.0\text{ cm}$ ，试计算载流回路受到的总的安培力。

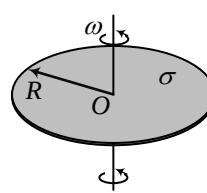
12.37 如图所示，一根电流为 I_1 的长直载流导线和一个电流为 I_2 、半径为 R 的圆形载流导线共面放置，其中长直导线恰好位于圆电流的直径上（两导线的交点处互相绝缘）。假设导线的形状不变，试求圆电流受到的安培力的大小和方向。



习题 12.37 解图



习题 12.38 解图

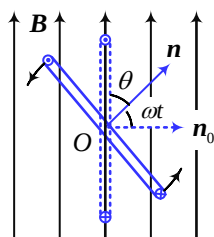


习题 12.39 图

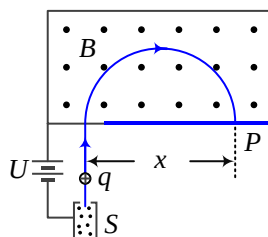
12.38 将一无限大载流平面放入均匀外磁场中，已知电流在平面上均匀分布，磁场方向与电流方向互相垂直，且与载流平面平行。放入后，载流平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 ，如图所示。试求该载流平面单位面积上所受的磁场力的大小和方向。

12.39 一半径为 R 、均匀带电的薄圆盘，放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中， B 的方向与盘面平行，圆盘表面的电荷面密度为 σ 。若圆盘以角速度 ω 绕通过盘心、并垂直于盘面的轴转动。求证：作用在圆盘上的磁力矩的大小为： $M = \frac{\pi\sigma\omega BR^4}{4}$ 。

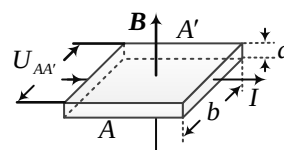
12.40 一面积为 S 的矩形线圈，所载电流 $I = I_0 \cos(\omega t + \pi)$ ，在磁感应强度为 B 的均匀磁场中以匀角速度 ω 绕其中心轴匀速转动。 $t = 0$ 时，线圈的正法线方向 n_0 与 B 垂直，如图所示。求线圈所受磁力矩在一个周期 T 内所做的功。



习题 12.40 图



习题 12.41 图



习题 12.42 图

12.41 测定离子质量的质谱仪如图所示，离子源 S 产生质量为 m ，电荷为 q 的某种离子，离子的初速很小，可看作静止，经电势差 U 加速后离子进入磁感强度为 B 的均匀磁场，并沿一半圆形轨道到达离入口处距离 x 的感光底板上。试证明该离子的质量为

$$m = \frac{B^2 q}{8U} x^2$$

12.42 载流子浓度是半导体材料的重要参数，工艺上通过控制三价或五价掺杂原子的浓度，来控制 p 型或 n 型半导体的载流子浓度。利用霍耳效应可以测量载流子的浓度和类型。如图所示一块半导体材料样品，均匀磁场垂直于样品表面，样品中通过的电流为 I ，现测得霍耳电压为 U_H 。

(1) 若 $U_H = V_A - V_{A'} > 0$ ，试判断该半导体的类型；

(2) 证明样品中载流子浓度为： $n = \frac{IB}{edU_H}$ 。

*12.43 根据氢原子的波尔理论，质量为 m 、电量为 e 的电子只能在一些半径不连续的轨道上作圆周运动，其可能的轨道半径为 $r_n = n^2 r_1$ ，式中 $n = 1, 2, 3, \dots$ ， $r_1 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ 是氢原子的基态轨道半径。假设氢原子中电子在某一轨道上作圆周运动的角速度为 ω 。当加上外磁场 B 时（ B 的方向与电子轨道平面垂直），电子轨道半径不变，而角速度则变为 ω' 。试证明电子角速度的变化为

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \pm \frac{eB}{2m}$$

第 13 章 磁介质

课件下载：
第 13 章 磁介质

上一章在讨论电流的磁场时，我们假定载流导线周围是真空，没有任何其它介质。但在实际情况中，载流导线周围存在着各种物质，这些物质都能与磁场发生相互作用，从而影响原有的磁场分布。这种能够与磁场发生相互作用的物质统称为**磁介质**（magnetic medium）。实际上一切物质都是磁介质。本章就来讨论磁介质与磁场的相互作用规律以及物质磁性的本质。

§ 13.1 磁介质的磁化

13.1.1 磁介质的磁化 相对磁导率

与电介质在电场中会与电场发生相互作用，从而被电场极化一样，磁介质在磁场中也会与磁场发生相互作用，并被磁场磁化。被磁化后的磁介质会激发附加磁场 $\mathbf{B}'$ ，从而影响原来的磁场 $\mathbf{B}_0$ 的分布，如图 13.1 所示。

根据场强叠加原理，磁介质内的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (13.1)$$

磁介质对磁场的影响可以通过实验来观察。例如，将螺绕线圈缠绕在圆环形磁介质棒上，并在圆环上开一个很小的缝，如图 13.2 所示，再将探测元件（霍尔片）插入狭缝中，当线圈内通入电流时，即可测定磁介质内的磁感强度。使用不同的磁介质环，可测定不同的磁介质对外磁场的不同影响。当磁介质

被均匀磁化时，磁介质内磁感应强度的大小 B 与该处没有磁介质时真空中磁感应强度的大小 B_0 的比值，称为磁介质的**相对磁导率**（relative permeability），并用 μ_r 表示，即

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad (13.2)$$

由定义可知， μ_r 是一个无量纲的纯数，它的大小表示了磁介质对磁场的影响程度。实验表明，相对磁导率 μ_r 的大小只与磁介质的性质有关。人们根据 μ_r 的大小将磁介质分

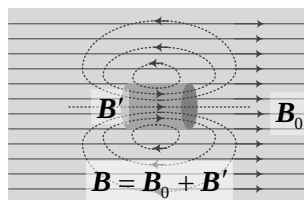


图13.1 磁介质对磁场的影响

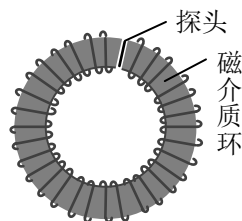


图13.2 螺绕环

成顺磁质、抗磁质和铁磁质三类。

对于**顺磁质**（diamagnetic substance）（例如氧、镁、铝、铬、锰、铂等）， μ_r 略大于1，即 $\mu_r \approx 1+10^{-4} > 1$ 。这表明，顺磁质被磁化后产生的附加磁场的方向与原磁场方向相同，使磁介质内的磁场略有增大。

对于**抗磁质**（paramagnetic substance）（例如氢、钠、铜、铋、汞等）， μ_r 略小于1，即 $\mu_r \approx 1-10^{-5} < 1$ 。这表明，抗磁质被磁化后产生的附加磁场的方向与原磁场方向相反，使磁介质内的磁场略有减小。

对于**铁磁质**（ferromagnetic substance）（例如铁、钴、镍等金属及其合金材料，以及某些铁氧化物材料），其相对磁导率 $\mu_r \gg 1$ ，通常可达几百甚至几万，它们被磁化后产生的附加磁场 $\mathbf{B}'$ 的方向与原磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向相同，且 $\mathbf{B} \gg \mathbf{B}_0$ 。

对于顺磁质和抗磁质，介质中磁感应强度 $\mathbf{B}$ 与原真空中磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 的大小几乎相等，即它们对磁场的影响在实际工作中几乎可以忽略不计，所以我们将顺磁质和抗磁质统称为**弱磁介质**，而将铁磁质称为**强磁介质**。一般来说，凡是能被吸铁石吸引的介质都是铁磁质（强磁介质），而不能被吸铁石吸引的磁介质就是弱磁介质（顺磁质或抗磁质）。

13.1.2 顺磁质和抗磁质磁化的微观机制

1. 顺磁质的磁化

根据物质的电结构理论，任何物质都是由分子或原子组成的，而分子或原子中的每个电子都有自旋和轨道两种运动，每一种运动都会产生磁效应。对于整个分子或原子来说，分子或原子中所有电子产生的磁效应的总和可以用一个等效圆电流表示，这个等效圆电流称为**分子电流**，分子电流所形成的磁矩分为**分子磁矩**（molecular magnetic moment）。在没有外磁场时，每个分子具有的磁矩称为**分子的固有磁矩**，用 $\mathbf{p}_m$ 表示。

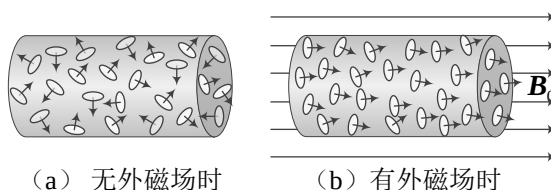


图13.3 顺磁质的磁化

对于顺磁质来说，物质中每个分子或原子的固有磁矩不为零。在没有外磁场作用时，由于分子的无规则热运动，每个分子的固有磁矩 $\mathbf{p}_m$ 在空间的方向是杂乱无章的，如图 13.3 (a) 所示，因此就顺磁质整体而言，对外没有磁性。

有外磁场 $\mathbf{B}_0$ 作用时，磁介质中的每个分子在外磁场中会受到一个磁力矩 ($\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}_0$) 的作用，使分子固有磁矩的方向在外磁场中转向，转到与外磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向趋于一致，如图 13.3 (b) 所示，从而使磁介质在整体上呈现出一定的磁性。但由于分子无规则热运动的影响，分子磁矩沿外磁场方向排列的有序度有限。外磁场越强，分子磁矩排列的有序度越高，因而对外呈现的磁性也越强。这样，全部分子磁矩所形成的总的磁效应就产生了一个沿外磁场方向的附加磁场 $\mathbf{B}'$ 。由于附加磁场 $\mathbf{B}'$ 和外磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向相同，所以顺磁质被磁化后，磁介质内的磁场要大于外磁场 $\mathbf{B}_0$ 。这就是顺磁质磁化的微观机制，或顺磁效应的来源。

2. 抗磁质的磁化

对于抗磁质，每个分子或原子中所有电子的轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和为零，即每个分子的固有磁矩为零。所以，无外磁场作用时的抗磁质没有磁性。当有外磁场作用时，分子中每个电子的轨道运动将受外磁场的影响，因而引起附加磁矩 $\Delta\mathbf{p}_m$ 。下面，我们首先分析一下附加磁矩 $\Delta\mathbf{p}_m$ 的方向与外磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向之间的关系。

考察一个在半径为 r 的圆形轨道上绕核运动的电子，在没有外磁场时，电子的运动速率为 v_0 ，此时电子受到的向心力就是原子核对它的库仑力。当有外磁场存在时，不妨假设外磁场的方向垂直于圆形轨道平面，且与电子的角速度方向相反，即与电子轨道磁矩 $\mathbf{p}_m$ 的方向相同，如图 13.4 (a) 所示。此时运动电子在外磁场中会受洛伦兹力 $\mathbf{F}_m$ ，显然该力的方向与矢径 $\mathbf{r}$ 的方向相反，使向心力减小，同时因电子绕核运动的轨道半径不变，所以使电子的运动速度减小，等效圆电流和电子的轨道磁矩 $\mathbf{p}_m$ 均相应减小。这相当于产生了一个与 $\mathbf{p}_m$ 反向的附加磁矩 $\Delta\mathbf{p}_m$ ，因 $\mathbf{p}_m$ 与 $\mathbf{B}_0$ 同向，所

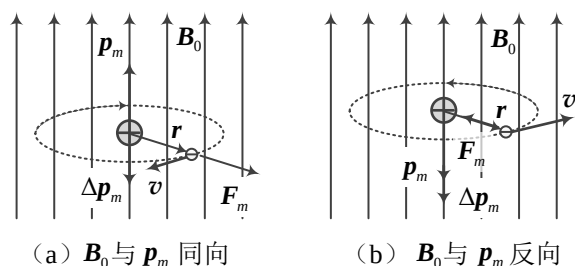


图13.4 电子的轨道运动在外磁场中产生的附加磁矩

以 $\Delta \mathbf{p}_m$ 与 $\mathbf{B}_0$ 反向。同理可知，当电子沿反方向运动，即 $\mathbf{p}_m$ 与 $\mathbf{B}_0$ 方向相反时，如图 13.4 (b) 所示， $\mathbf{F}_m$ 指向圆心，这将使向心力增大，从而使电子的运动速率增大，因而 $\mathbf{p}_m$ 增大。这相当于产生了一个与 $\mathbf{p}_m$ 同方向的附加磁矩 $\Delta \mathbf{p}_m$ ，因 $\mathbf{p}_m$ 与 $\mathbf{B}_0$ 反向，所以 $\Delta \mathbf{p}_m$ 也与 $\mathbf{B}_0$ 也反向。

由此可知，无论电子绕核运动的速度方向如何，外磁场所引起的附加磁矩 $\Delta \mathbf{p}_m$ 与外磁场 $\mathbf{B}_0$ 总是方向相反，所以由附加磁矩 $\Delta \mathbf{p}_m$ 产生的附加磁场 $\mathbf{B}'$ 总是与外磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向相反，因而抗磁质磁化后将使磁介质内的磁场减弱。

应当指出：顺磁质中，核外电子的轨道运动也会产生附加磁矩，产生抗磁效应。但是顺磁质中的抗磁效应远小于顺磁效应，因此在顺磁质的磁化过程中可以不考虑其抗磁效应。

13.1.3 磁化强度与磁化电流

1. 磁化强度

磁化强度是用于表征磁介质磁化程度的物理量。由上述讨论可知，无论是顺磁质还是抗磁质，磁介质被磁化之前，介质内分子磁矩的矢量和 $\sum \mathbf{p}_{\text{分子}}$ 为零。当磁介质被磁化后顺磁质中每个分子或原子的固有磁矩将有序排列，抗磁质中每个电子的轨道运动都会产生附加磁矩，从而使介质内分子磁矩的矢量和不为零。人们将磁介质中单位体积内分子磁矩的矢量和称为**磁化强度**，并用 $\mathbf{M}$ 来表示，即

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{p}_{\text{分子}}}{\Delta V} = \frac{\sum \mathbf{p}_m + \sum \Delta \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (13.3)$$

式中 $\sum \mathbf{p}_m$ 是体积 ΔV 内分子固有磁矩的矢量和， $\sum \Delta \mathbf{p}_m$ 是体积 ΔV 内分子附加磁矩的矢量和。对于顺磁质， $\sum \Delta \mathbf{p}_m$ 可以忽略不计， $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}$ 的方向一致；对于抗磁质， $\sum \mathbf{p}_m = 0$ ， $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{B}$ 的方向相反。在国际单位制中， $\mathbf{M}$ 的单位为：安培·米⁻¹（A·m⁻¹）。

磁介质被磁化后，如果介质内部各处 $\mathbf{M}$ 的大小和方向均相同，则介质被均匀磁化；否则，为非均匀磁化。

2. 磁化电流

磁介质被磁化的情况，我们既可以用磁化强度 $\mathbf{M}$ 来描述，也可以用磁化电流 I_s 来表示。下面我们以一根被均匀磁化的顺磁质棒为例来说明磁化电流与磁化强度之间的关系。

假设在均匀外磁场 $\mathbf{B}_0$ 中放入一根各向同性的圆柱形均匀顺磁质棒，棒的轴线与外磁场方向平行，如图 13.5 所示。当顺磁质被均匀磁化后，磁介质棒内各分子电流的平面基本上都与棒的轴线垂直，分子固有磁矩 $\mathbf{p}_m$ 的方向沿外磁场 $\mathbf{B}_0$ 的方向排列。不难看出，在磁介质内部任一点处，总是有两个方向相反的分子电流通过，结果互相抵消；只有在磁介质棒的表面处，分子电流并不成对出现，因此磁介质表面处的分子电流不能抵消，结果便形成了沿棒的表面环绕轴线流动的圆电流，称为**磁化面电流**，简称**磁化电流**，用 I_s 表示。沿轴线单位长度上的磁化面电流称为**磁化电流密度**，用 $\mathbf{j}_s$ 表示。于是，沿棒的轴线方向长为 L 的表面上，磁化电流的大小为： $I_s = j_s L$ 。介质被磁化的程度越大，介质表面的磁化电流则越大。

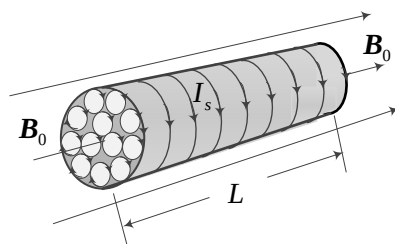


图13.5 磁化电流

对于顺磁质，介质表面磁化电流的方向与介质内磁场的方向成右手螺旋关系，而对于抗磁质，磁化电流的方向与磁场方向成左手螺旋关系。

由上述讨论可知，磁介质被磁化后，介质表面的磁化电流与它所产生的磁场的关系就如同螺线管线圈上的电流与它产生的磁场的关系。所以一个载流螺线管线圈和一根沿轴线方向被均匀磁化的磁介质棒（如条形磁铁）产生的磁场具有相同的分布规律。

应该指出：磁化电流不是电子沿磁介质表面作定向流动形成的电流，而是分子磁矩的定向排列显示磁效应的一种表示，是一种等效电流。这种电流不能脱离磁介质被导线引出。

3. 磁化强度与磁化电流的关系

既然介质被磁化的程度既可以用磁化强度 $\mathbf{M}$ 来表示，也可以用磁化电流 I_s 来描述。那么 $\mathbf{M}$ 和 I_s 之间必然有联系。考虑一段截面积为 S ，长为 L 的磁介质棒，如上图 13.5 所示，当该棒沿轴线方向被均匀磁化时，若介质表面的磁化电流密度为 $\mathbf{j}_s$ ，则棒内的总分子磁矩的大小为

$$\sum p_{\text{分子}} = I_s \cdot S = j_s L S$$

由式（13.3）可得，介质内的磁化强度为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum p_{\text{分子}}}{\Delta V} = \frac{j_s LS}{LS} = j_s \quad (13.4)$$

即当磁化强度的方向与介质表面平行时，磁介质表面磁化电流密度的大小等于该处磁化强度的大小。

如果磁化强度与磁介质表面不平行，则

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (13.5)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为磁介质表面的外法线单位矢量。该式表明，磁化强度 $\mathbf{M}$ 沿磁介质表面的切向分量等于介质表面磁化电流密度。

可以证明：磁化强度 $\mathbf{M}$ 与磁化电流 I_s 之间的普遍关系为

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} = \sum I_s \quad (13.6)$$

该关系式表明，磁化强度 $\mathbf{M}$ 沿任意闭合回路 L 的线积分（或环流）等于穿过此闭合回路所围面积的磁化电流 I_s 的代数和。

§ 13.2 有磁介质存在时的安培环路定理和高斯定理

13.2.1 有磁介质存在时磁场的安培环路定理 磁场强度

根据上一节的讨论可知，有磁介质存在时，空间任意一点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 应由导线中的传导电流 I_0 和磁介质表面的磁化电流 I_s 共同产生，因此有磁介质存在时，磁场的安培环路定理应该写成

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 (\sum I_0 + \sum I_s) \quad (13.7)$$

式中， $\sum I_0$ 是穿过闭合回路 L 所围面积的传导电流的代数和， $\sum I_s$ 是磁化电流的代数和。一般来说，传导电流可以通过改变电路参数来控制，并可用电流表测出；但磁化电流 I_s 的大小不仅与磁介质的性质有关，还与磁介质被磁化的程度有关，而且被束缚在磁介质表面，不能用导线引出，所以磁化电流 I_s 无法直接测量或给定。因此，如果我们直接用式（13.7）来处理具体问题，就会遇到困难。为此需要将式（13.7）做适当的改变，以方便实际应用。

如果将磁化强度 $\mathbf{M}$ 与磁化电流 I_s 的普遍关系式（13.6）代入上式，则有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \left(\sum I_0 + \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \right) \quad (13.8)$$

或写为

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{L} = \sum I_0 \quad (13.9)$$

类似于在电介质中引入电位移矢量 $\mathbf{D}$ 一样，在这里，我们也同样引入一个新的辅助物理量，称为**磁场强度**（magnetic field intensity），用 $\mathbf{H}$ 表示，并定义

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (13.10)$$

则式（13.9）可以写成

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum I_0 \quad (13.11)$$

式（13.11）就是**有磁介质存在时磁场的安培环路定理**。此式表明：**磁场强度 $\mathbf{H}$ 沿任一闭合回路 L 的线积分（或环流）等于通过该回路 L 所围面积的传导电流的代数和**。由于在式（13.11）中，只有传导电流，没有磁化电流，所以能够比较方便地处理磁介质问题。实际上，无论是否存在磁介质，只要是稳恒电流产生的磁场，由式（13.11）所表示的安培环路定理总是成立的。

应当指出，磁场强度 $\mathbf{H}$ 只是我们为了讨论问题的方便而引入的一个辅助物理量， $\mathbf{H}$ 的大小并不能反映磁场的强弱，也不能反应运动电荷所受的力。决定磁场强弱及其性质的物理量仍然是磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 。那为什么我们不将 $\mathbf{B}$ 称为磁场强度，使其名符其实呢？显然这是由于物理学史上的一种误解所造成的，所有的物理学家和科研人员已经习惯于这样称呼它们了。

13.2.2 磁介质的磁化特性

实验证明，在各向同性的磁介质内部，任意一点的磁化强度 $\mathbf{M}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 成正比，即

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (13.12)$$

式中 χ_m 为比例系数，称为介质的**磁化率**，它只与磁介质自身的性质有关。由于 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{H}$ 的单位相同，所以磁化率 χ_m 是一个无量纲的纯数。对于顺磁质， $\chi_m > 0$ ，表明顺磁质中 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向相同；对于抗磁质， $\chi_m < 0$ ，表明抗磁质中 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向相反。

由磁场强度的定义式（13.10），可得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (13.13)$$

再将式 (13.12) 代入式 (13.13), 得

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (13.14)$$

式中

$$\mu_r = 1 + \chi_m, \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad (13.15)$$

μ_r 和 μ 分别称为磁介质的**相对磁导率** (relative permeability) 和**绝对磁导率** (absolute permeability)。不难看出, χ_m 、 μ_r 和 μ 都是描述磁介质磁化特性的物理量, 它们之间的关系由式 (13.15) 给出。显然, 只要知道了其中任意一个量, 其他两个量也就随之确定了, 磁介质的磁化特性就完全清楚了。

对于真空中的磁场, 由于 $\mathbf{M} = 0$, 由式 (13.12) — (13.15) 可得: $\chi_m = 0$ 及 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, 这表明真空中的相对磁导率 $\mu_r = 1$ 。

13.2.3 有磁介质存在时磁场的高斯定理

由上述讨论可知, 无论是导线中的传导电流, 还是磁介质表面的磁化电流, 它们激发磁场的方式相同, 因此产生的磁场的性质也相同, 而总磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是这两种电流激发的磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{B}'$ 的矢量和, 所以总磁感应线仍然是闭合曲线, 即磁场是有旋场, 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 对任一闭合曲面的磁通量仍然为零, 即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (13.16)$$

这就是有磁介质存在时磁场的高斯定理。该定理表明, 有磁介质存在时, 磁场仍然是无源场。

13.2.4 有磁介质存在时磁场的安培环路定理的应用

当磁介质中的磁场分布具有某种特殊的对称性时, 利用有磁介质存在时磁场的安培环路定理来计算磁场分布, 可以避开对磁化电流 I_s 的分析, 从而使问题得到简化处理。下面, 举例说明有磁介质存在时磁场的安培环路定理的应用。

例 13.1 如图 13.6 所示, 一根很长的同轴电缆, 芯线是半径为 R_1 的实心导线, 外面套了一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的

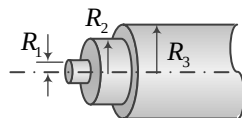


图13.6 例13.1图

同轴圆筒形导线，内外导线之间充满了绝缘的磁介质，其相对磁导率为 μ_{r1} ($\mu_{r1} > 1$)，导体的相对磁导率为 μ_{r2} ，同轴电缆内有稳恒电流 I 通过，内外导体上的电流方向相反，且电流沿导线的横截面均匀分布。试求：

(1) 空间各区域内磁感应强度的分布；

(2) 绝缘磁介质内表面上的磁化电流。

解：(1) 由题意可知，该电流产生的磁场分布具有“无限长”的轴对称性，为此在垂直于导线轴线的平面内，取一个半径为 r 的同心圆环作为闭合回路。由对称性可知回路上各处的磁场强度大小相等，方向沿圆周的切线方向，根据安培环路定理：

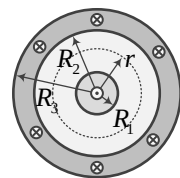


图13.7 例13.1解图

$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum I$ ，可得

$$H \cdot 2\pi r = \sum I$$

当 $r < R_1$ 时， $\sum I = \frac{r^2}{R_1^2} I$ ，所以： $H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r$

再由式 (13.14) 可得磁感应强度为

$$B = \mu_0 \mu_{r2} H = \frac{\mu_0 \mu_{r2} I}{2\pi R_1^2} r$$

同理可知，当 $R_1 < r < R_2$ 时， $\sum I = I$ ，所以

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu_0 \mu_{r1} H = \frac{\mu_0 \mu_{r1} I}{2\pi r}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时， $\sum I = I - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I = \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} I$ ，所以

$$H = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}, \quad B = \mu_0 \mu_{r2} H = \frac{\mu_0 \mu_{r2} I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

当 $r > R_3$ 时， $\sum I = 0$ ，所以： $H = 0$ ， $B = 0$ 。

(2) 在绝缘磁介质内部，即当 $R_1 < r < R_2$ 时，磁介质内的磁化强度为

$$M = \chi_m H = (\mu_{r1} - 1) H = \frac{(\mu_{r1} - 1) I}{2\pi r}$$

于是，在绝缘磁介质的内表面上，即 $r = R_1$ 处，磁化面电流密度的大小为

$$j_s = M|_{r=R_1} = \frac{(\mu_{r1}-1)I}{2\pi R_1}$$

方向沿轴线方向，所以总磁化电流的大小为

$$I_s = j_s 2\pi R_1 = (\mu_{r1}-1)I$$

例 13.2 如图 13.8 所示，有一“无限长”载流密绕直螺线管，线圈中通有电流 I ，沿轴线单位长度内线圈的匝数为 n ，管内充满了相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质。试求管内的磁感应强度和磁介质表面的磁化电流密度。

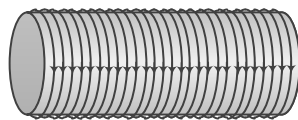


图13.8 例13.2图

解： 根据磁感线与电流线之间满足的右手螺旋关系可知，“无限长”载流密绕直螺线管内的磁场方向平行于轴线向右，且均匀分布，在螺线管外磁场为零，如图 13.8 所示。为此，取如图所示的矩形闭合回路 $abcd$ ，根据有磁介质存在时的安培环路定理，有

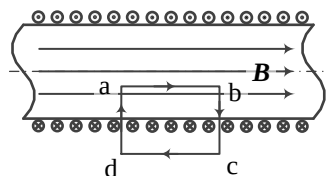


图13.8 例13.2解图

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \\ &= H \cdot \overline{ab} + 0 + 0 + 0 = H \cdot \overline{ab} = \sum I = nI \cdot \overline{ab}\end{aligned}$$

由此得螺线管内磁场强度的大小为

$$H = nI$$

方向平行于轴线，由 a 指向 b 。再由式 (13.14)，可得管内磁感应强度的大小为

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r nI$$

方向与 $\mathbf{H}$ 一致。

再由磁介质的磁化规律式 (13.12)，得磁介质内磁化强度的大小为

$$M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)nI$$

方向平行于介质表面，沿轴线方向，所以磁介质表面磁化电流密度为

$$j_s = M = (\mu_r - 1)nI$$

对于顺磁质或铁磁质， $\mu_r > 1$ ， $j_s > 0$ ，即磁化电流与线圈中传导电流方向一致；对于抗磁质， $\mu_r < 1$ ， $j_s < 0$ ，即与传导电流方向相反。

§ 13.3 铁磁质

铁磁质是应用最广泛的一类磁介质，在电磁铁、电动机、发电机、变压器和电表的线圈中都要用到铁磁性物质。常见的铁磁质有：铁、钴、镍等金属及其合金。铁磁质的磁化特性远比抗磁质或顺磁质复杂，主要有如下几点：

- (1) 铁磁质的相对磁导率 μ_r 很大，可达几百甚至几万，且不是常数，在磁场中放入铁磁质，可使磁感应强度 $\mathbf{B}$ 成千上万倍地增加。为此，铁磁质也称为强磁介质。
- (2) 铁磁质内 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 不成线性关系，而且有磁滞现象，即 $\mathbf{B}$ 的变化落后于 $\mathbf{H}$ 的变化。
- (3) 所有的铁磁质均有一个临界温度 T_c 。当 $T > T_c$ 时，铁磁质失去铁磁性，变成顺磁质。这一临界温度 T_c 称为居里点（Curie Point）。钴的居里点约为 1404K，铁的居里点约为 1043K，镍的居里点约为 631K。

13.3.1 铁磁质的起始磁化曲线和磁滞回线

我们以铁芯为例制作一个带铁芯的螺绕环，如图 13.12 所示。当铁心的横截面积远小于环的面积时，由磁介质中的安培环路定理，可得磁介质中的磁场强度 H 与线圈中的电流 I 满足

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI$$

改变线圈中的电流 I ，测出管内的磁感应强度 B 的大小，即可得到 B 和 H 的关系曲线，如图 13.10 所示。再由

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

即可得 $\mu-H$ 曲线，如图 13.11 所示。

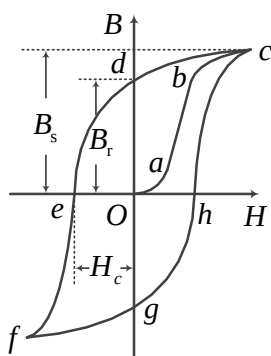


图13.10 铁磁质的起始磁化曲线及磁滞回线

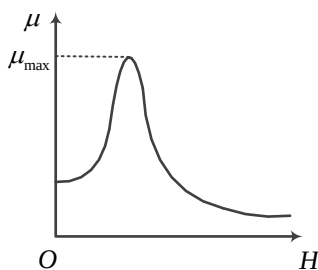


图13.11 铁磁质的 $\mu-H$ 曲线

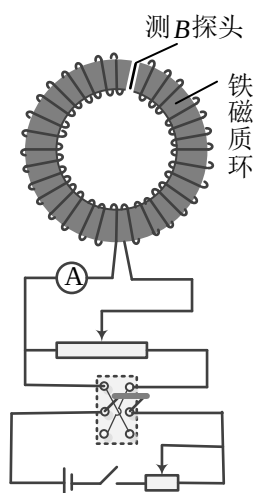


图13.12 铁磁质磁化特性的测量

在图 13.10 中，由坐标原点 O 引出的磁化曲线 $Oabc$ 称为铁磁质的起始磁化曲线。当

一个未被磁化过的铁磁质置于由传导电流产生的外磁场中时，如图 13.12 所示，可以利用传导电流产生的磁场使其磁化，通常这样的传导电流称为**励磁电流**。在起始阶段，当励磁电流为零时， B 和 H 都为零；然后沿某一方向增加励磁电流 I ，以增大 H ，刚开始 B 将随 H 的增大而缓慢增大（如图 13.10 中曲线的 Oa 段），介质的磁导率 μ 则从某个初值开始迅速增大，如图 13.11 中 $\mu-H$ 曲线的开始部分；过 a 点后，当 H 继续增大时， B 急剧增大（如图 13.10 中曲线 ab 段），对应的磁导率在最大值 $\mu_{\max}$ 附近；再继续增大 H 时， B 的增加变得较为缓慢（图中 bc 段），磁导率也逐渐减小；当 B 达到 B_s 后基本上不再随 H 的增大而增大，这时铁磁质的磁化达到了饱和， B_s 称为铁磁质的饱和磁感应强度。由图 13.10 和图 13.11 可见，铁磁质的磁化曲线（ $B \sim H$ 曲线）是非线性的，其磁导率 μ 也不是常数。

铁磁质的另一重要特性是具有磁滞效应，我们仍然以图 13.10 中的 $B \sim H$ 曲线来说明。

当铁磁质的磁化达到饱和后，如果减少励磁电流，使 H 减小，则 B 也随之减少，但 B 并不沿起始磁化曲线原路返回，而是沿另一曲线 cd 下降，这表明铁磁质的磁化过程是不可逆的；当 H 减小到零，即将励磁电流减小到零时，铁磁质中的 B 并不为零，而是保留一定的数值 B_r ，此 B_r 称为**剩磁**（remanence）。要消除剩磁，必须沿相反方向逐渐增大励磁电流，使 H 反向并逐渐增大，这相当于在铁磁质上施加一个反向的外磁场，当 B 沿曲线的 de 段逐渐减小到零时，所加的反向磁场强度 H_c 称为**矫顽力**（coercive force），矫顽力的大小反映了铁磁质保存剩磁的能力。如果继续增大反向磁场强度 H ，则磁感应强度 B 将达到反向饱和磁化状态（图中 f 点）。然后，如果再将反向磁场强度（即反向励磁电流）逐渐减小到零，则 B 将沿曲线 fg 减小，并得到反向剩磁 B_r 。此后，若再一次改变励磁电流的方向，并使电流逐渐增大，磁场强度 H 也变回正向，并逐渐增加，则可以使反向磁感应强度 B 沿曲线 gh 减小到零，并沿着曲线 hc 再次达到正向磁化饱和状态（图中 c 点）。最终便形成了如图 13.10 中所示的闭合曲线 $cdefghc$ ，这称为铁磁质的**磁滞回线**（hysteresis loop）。

磁滞回线表明，铁磁质中磁感应强度 B 的变化，总是落后于磁场强度 H 的变化，这种现象称为**磁滞**（hysteresis）。

不难看出，当铁磁质处在交变外磁场中时，将被外磁场沿两个相反的方向反复磁化。

因磁滞效应的存在，在反复磁化过程中，将伴有能量损耗，这种损耗称为“**磁滞损耗**”。它是导致变压器温度升高的主要原因之一。理论和实验均表明，铁磁质在一个磁化周期内磁滞损耗的大小正比于磁滞回线所围的面积，磁滞回线所围的面积越大，消耗的能量就越多。所以变压器中的铁芯通常选用磁滞回线的面积比较狭窄的硅钢片等软磁材料来制作。

13.3.2 铁磁质的分类及其主要特点

通常说的磁性材料就是强磁介质，即铁磁质。按其化学成分来分，可分成金属磁性材料（如铁、钴、镍及其合金）和非金属磁性材料（铁氧体）。按照其磁滞回线的形状来分，通常可分为三大类：软磁材料、硬磁材料和矩磁材料。

软磁材料（如纯铁、硅钢等）的主要特点是：磁滞回线细窄，面积小，顺磁小，矫顽力小（ $H_c < 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ），如图 13.13（a）所示。它的磁滞特性不显著，磁滞损耗低，容易磁化，也容易退磁。这种材料适用于交变磁场。变压器、继电器、电磁铁、电感线圈中的铁芯以及录音磁头、天线磁芯等都由软磁材料制作。

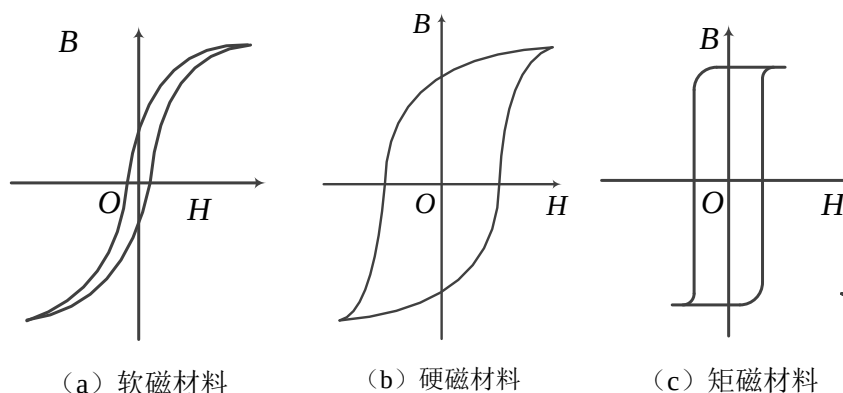


图 13.13 铁磁质的分类

硬磁材料（如碳钢、钨钢等）的主要特点是：磁滞回线的形状较胖，面积大，剩磁大，矫顽力大（ $H_c > 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ），如图 13.13（b）所示。它的磁滞特性显著，磁滞损耗也大，即使撤消外磁场，也能保持很强的剩磁，而且不容易退磁，这种材料适合制造永久磁铁，以产生恒定磁场。

矩磁材料（如铁氧体）的磁滞回线接近于矩形，如图 13.13（c）所示。矩磁材料的

特点是剩磁 B_r 非常接近饱和值 B_s ，同时矫顽力 H_c 不太大。当外磁场的方向改变并达到一定强度时，可以从某一稳定态瞬间“翻转”到另一稳定态；当外磁场为零时，总是处于 B_r 或 $-B_r$ 两种剩磁状态。如果利用 B_r 或 $-B_r$ 这两种剩磁状态来表示二进制中的“0”和“1”两个数码，则矩磁材料能起“记忆”作用。因此矩磁材料通常可作为计算机的记忆和存储元件。

表 13.1 几种金属软磁材料的性能

材料名称	成分	最大 μ_r	B_s / T	$H_c / (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	居里点/K
工程纯铁(99%铁)		5 000	2.15	100	1043
硅钢（热轧）		7 000	1.95	19.8	1003
坡莫合金（78%铁、22%镍）		100 000	1.07	3.9	873

表 13.2 几种铁氧体软磁材料的性能

材料名称	成份	μ_r	B_s / T	适用频率范围
锰锌铁氧体	氧化锰、氧化锌、氧化铁	300~500	0.15~0.50	0.1MHz 以上
镍锌铁氧体	氧化镍、氧化锌、氧化铁	10~1000	0.15~0.50	1MHz 以上

表 13.3 几种硬磁材料的性能

材料名称	成份	B_s / T	$H_c / (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$
碳钢	0.9%碳、99.1%铁	1	5 000
钨钢	6%钨、0.7%碳、0.3%锰、93%铁	1.05	6500
钡铁氧体	BaO Fe ₂ O ₃	0.38	1.34×10^5
钕铁硼合金		1.07	8.8×10^5

除了软磁、硬磁和矩磁材料外，还有一些功能磁性材料，如磁致伸缩材料、磁电阻材料、磁制冷材料、磁致旋光材料和磁流体材料等。

表 13.1 和表 13.2 列出了几种常用金属软磁材料和铁氧体软磁材料的性能参量，表 13.3 列出了几种硬磁材料的性能。



图13.14 各种磁性材料

磁性材料的用途十分广泛，不仅在电子技术中有重要应用，在工业生产、日常生活

和国防科技中均获得了广泛应用。如从指南针、喇叭/耳机/话筒、天线磁棒、各种磁卡、手机、电脑、家用电器、各种电机、变压器、磁性水雷、电磁炮、一直到航天飞机都可以找到磁性材料的应用例子。

13.3.3 铁磁质磁化的微观机制

铁磁质的磁化特性可以用磁畴理论来解释。根据固体结构理论，铁磁质的磁性源于电子的自旋磁矩。由于铁磁质中相邻原子的电子之间存在很强的“交换耦合”作用，使电子的自旋磁矩在小范围内自发地定向排列，形成一个宏观上很小的自发磁化区域，称为**磁畴**（magnetic domain）。每个磁畴可看作是一个很小的强磁体，如图 13.15 所示。

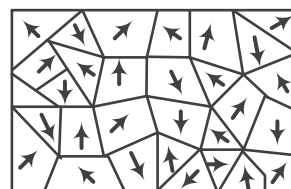


图13.15 磁畴

无外磁场时，在未被磁化的铁磁质中，各磁畴自发磁化的方向无序排列，杂乱无章，产生的磁效应互相抵消，整体不呈现磁性，如图 13.16（a）所示。

有外磁场时，随着外磁场从无到有逐渐加大，开始时，自发磁化方向与外磁场方向接近的磁畴区域逐渐扩大，而方向相差较大的磁畴区域逐渐缩小，直至消失，如图 13.16（b）→（c）所示；当外磁场继续增大时，磁矩的自发磁化方向将发生跳跃式偏转，尽可能转到与外磁场方向基本一致，如图 13.16（c）→（d）；当所有磁畴的自发磁化方向都转到与外磁场方向平行时，磁化便达到了饱和，如图 13.16（e）所示。

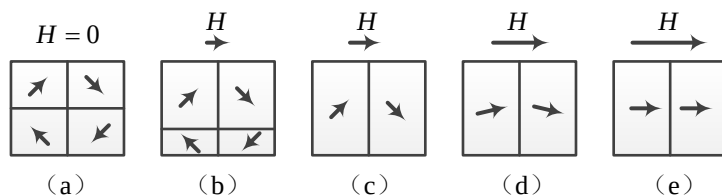


图13.16 铁磁质的磁化

磁滞现象可以用磁畴壁的运动和磁畴的转向都是不可逆的来解释。因为磁畴之间的相对运动存在“摩擦”，使得磁化成为不可逆过程，当外磁场减弱时，磁畴不能回复原状，便出现了磁滞效应；即便撤消外磁场，仍有部分磁畴的磁矩保持原来的取向，因而存在剩磁。

铁磁质有居里点的原因是磁畴会受到分子热运动的影响。温度升高时，每个磁畴产生的磁场会减弱，当温度升高到**居里点**（Curie point）时，剧烈的分子热运动会使磁畴彻

底瓦解，铁磁性完全消失，转化成顺磁质。由实验测得，铁的居里点约为 1043K。

思考题

13.1 试判断下列说法哪些是正确的？

- (1) 在各向同性的均匀介质中，无论是顺磁质、抗磁质或铁磁质， $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 的方向总是相同的；
- (2) $\mathbf{H}$ 的大小仅与传导电流有关；
- (3) 因为 $\mathbf{H}$ 称为磁场强度，所以 $\mathbf{H}$ 的大小就表示了磁场的强弱，即 $\mathbf{H}$ 大的地方，磁场一定强；
- (4) 磁场的强弱只能用 $\mathbf{B}$ 的大小来衡量。

13.2 磁化电流和传导电流之间有什么联系与区别？

13.3 为什么不能用电磁铁去吊运灼热的钢锭？

13.4 如何使磁铁的磁性反转？

文档 13.1 第 13 章
磁介质习题答案

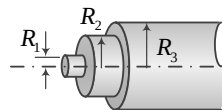
习题

13.5 一根介质棒沿其轴线方向被均匀磁化，其直径为 1.00cm，长为 20.0cm，磁化强度为 100A/m。

若棒内磁感应强度的大小为 $1.50 \times 10^{-3} \text{ T}$ ，试求：

- (1) 磁棒的磁矩及棒表面的磁化电流密度；
- (2) 棒内磁场强度的大小；
- (3) 该磁介质的相对磁导率。

13.6 一同轴电缆，由半径为 R_1 的长直导线和套在它外面的内半径为 R_2 、外半径为 R_3 的同轴圆柱形导体组成，内、外导体之间充满了相对磁导率为 μ_r ($\mu_r > 1$) 的绝缘磁介质，如图所示。导体的磁化可以忽略不计。电缆上通有稳恒电流 I ，且电流在导体截面上均匀分布，内、外导体上电流的方向相反。试求：



习题13.6图

- (1) 空间各区域内的磁场强度和磁感应强度的分布；
- (2) 磁介质内外表面上的磁化电流密度和磁化电流的大小。

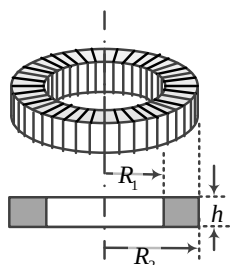
13.7 一个总匝数为 N 的螺绕环线圈，绕在了一个截面为矩形、内外半径分别为 R_1 和 R_2 ，高为 h 的磁介质圆环上，如图所示。设线圈内的励磁电流为 I ，磁介质的相对磁导率为 μ_r ($\mu_r > 1$)。

- (1) 求环内的磁场强度和磁感应强度的分布；
- (2) 求通过线圈横截面的磁通量；
- (3) 若 $N = 200$ 匝， $R_1 = 10.0 \text{ cm}$ ， $R_2 = 12.0 \text{ cm}$ ，环高 $h = 2.0 \text{ cm}$ ，实验测得当 $I = 500 \text{ mA}$ 时，通过线圈横截面的磁通量 $\Phi = 2.0 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ ，求该介质的相对磁导率。

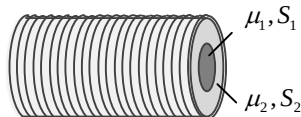
13.8 如图所示，有一截面为圆形，半径为 R_2 的长直载流密绕螺线管线圈，沿螺线管轴线单位长度

内线圈的匝数为 n ，管内充满了两层同轴的相对磁导率分别为 μ_{r1} 和 μ_{r2} 的均匀磁介质，其分界面的半径为 R_1 。当线圈内的传导电流为 I 时，试求：

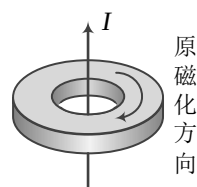
- (1) 两层磁介质内磁感应强度和磁化强度的大小；
- (2) 通过线圈横截面的磁通量。



习题13.7图



习题13.8图

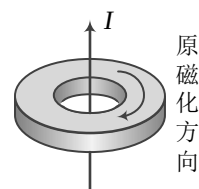


习题13.10图

13.9 一个充满铁磁质的螺绕环，其中心周长为 10.0cm ，环上均匀密线 200 匝线圈，环管内铁磁质的相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的铁磁质。当励磁电流为 100mA 时，试求：

- (1) 铁磁质内磁场强度 H 和磁感应强度 B 的大小；
- (2) 传导电流和磁化电流各自在铁磁质内产生的磁感应强度 B_0 和 B' 的大小。

13.10 一个用铁氧体（矩磁材料）制成的环形磁芯，外直径 0.8mm ，内直径 0.5mm ，高 0.3mm 。设其矫顽力为 $160\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ 。如果磁芯已被磁化（磁化方向如图所示），欲使整个磁芯的磁化方向全部反转，试求磁芯轴线上脉冲电流峰值的最小值。



习题13.10图

习 题 答 案

思考题 13.1~13.4 答案略

13.5 $1.57 \times 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 、 $100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ； $1.09 \times 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ；1.09

13.6 (1) 当 $r < R_1$ 时, $H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$

当 $R_1 < r < R_2$ 时, $H = \frac{I}{2\pi r}$, $B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$

当 $R_2 < r < R_3$ 时, $H = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$, $B = \frac{\mu_0 I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$

当 $r > R_3$ 时, $H = 0$, $B = 0$ 。

(2) $r = R_1$ 处, $j_{s1} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_1}$, $I_{s1} = (\mu_r - 1)I$

$r = R_2$ 处, $j_{s2} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_2}$, $I_{s2} = (\mu_r - 1)I$

13.7 $H = \frac{NI}{2\pi r}$ 、 $B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$ ； $\frac{\mu_0 \mu_r NI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ ；912

13.8 $B_1 = \mu_0 \mu_{r1} nI$ 、 $M_1 = (\mu_{r1} - 1)nI$, $B_2 = \mu_0 \mu_{r2} nI$, $M_2 = (\mu_{r2} - 1)nI$ ；
 $\mu_0 \mu_{r1} nI \cdot \pi R_1^2 + \mu_0 \mu_{r2} nI \cdot \pi (R_2^2 - R_1^2)$

13.9 $200 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ 、 1.06 T ； $2.52 \times 10^{-4} \text{ T}$ 、 1.06 T

13.10 0.4 A

第十四章 电磁感应

课件下载
第 14 章 电磁感应

自从 1820 年 7 月奥斯特发现了电流的磁现象以后，电磁热席卷欧洲。1821 年，时任英国皇家研究所实验室总监的法拉第接受了英国哲学杂志社的约稿，写一篇关于电磁问题的评述。为此法拉第广泛收集、认真研究了各类电磁学文献，并将其中的许多实验，特别是奥斯特的实验，一一亲自做过之后，以《电磁学的历史概要》为题，发表了评论。从此法拉第走进了电磁学研究领域。

通过仔细分析和类比，法拉第敏感地认识到电和磁是一对和谐的对称现象，既然奥斯特的实验实现了电流产生磁场，反过来也一定能让磁场产生电流。为此，法拉第从 1824 年开始进行这方面的研究，经过多年的不懈努力，终于在 1831 年 8 月 29 日取得了突破性进展，发现了电磁感应现象：**不论什么原因，当穿过闭合线圈中的磁通量发生变化时，线圈中会出现感应电流。**

电磁感应现象的发现，不仅发展了电磁学理论，更标志着电气时代和第二次工业革命的到来。

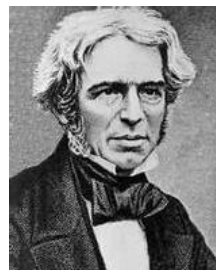
本章将讨论电磁感应现象的基本规律、动生电动势和感生电动势、自感与互感现象，最后讨论磁场的能量问题。

§ 14.1 电磁感应的基本定律

14.1.1 电磁感应现象

文档 14.1 迈克尔·法拉第

自从 1820 年奥斯特发现电流的磁效应后，很多科学家都致力于其逆效应的探索：如何使磁场产生电流？经过近 10 年的探索，在 1831 年，英国物理学家法拉第终于发现了**电磁感应现象**（electromagnetic induction）：**不论用什么方法，只要使得穿过闭合线圈中的磁通量发生变化，线圈中就会出现感应电流。**下面，我们先几个典型的实验来说明电磁感应现象，然后再给出电磁感应的基本定律。



迈克尔·法拉第

实验一：如图 14.1 所示，在一个软铁环上绕两个线圈 A 和 B，其中线圈 A 与检流计

G 连成一个闭合回路，线圈 B 通过开关 K 与电源相连构成回路。当开关闭合或断开的瞬间，检流计 G 的指针发生偏转，表明线圈 A 所在的回路中产生了感应电流，但两种情况下感应电流的方向相反。这是法拉第在 1831 年 8 月 29 日第一次发现电磁感应现象的实验，所不同的只是用放在导线旁的小磁针代替了检流计。

实验二：如图 14.2 所示，将一个空心的螺线管线圈 A 和检流计 G 连成一个闭合回路。当条形磁铁插入或拔出线圈时，或者磁铁不动，线圈向着或背离磁铁运动时，即两者发生相对运动时电流计的指针会发生偏转，偏转方向与两者的相对运动情况有关，偏转的大小与相对运动的速度有关。这是法拉第在 1831 年 10 月 17 日发现的“磁生电”的电磁感应现象。

实验三：如图 14.3 所示，用一个细长的通电螺线管线圈 B 代替实验二中的条形磁铁，在线圈 B 插入或拔出线圈 A 时，线圈 A 中同样有感应电流产生。

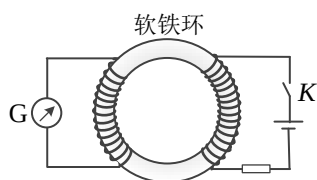


图14.1 电磁感应实验一

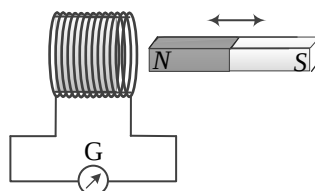


图14.2 电磁感应实验二

微视频：电磁感应演示实验

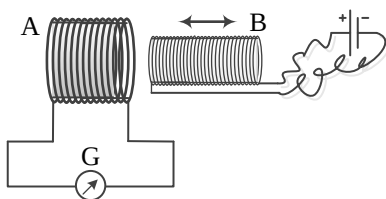


图14.3 电磁感应实验三

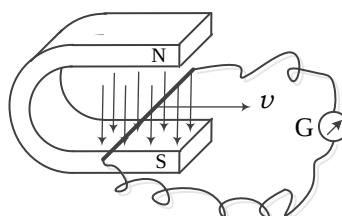


图14.4 电磁感应实验四

实验四：如图 14.4 所示，用导线把一根铜棒和检流计连成一个闭合回路，当铜棒在两个异名磁极间做切割磁力线运动时，在闭合回路内也会产生感应电流，电流方向与铜棒的运动方向和磁力线的方向有关。

综合这些实验可以发现，不论是什么原因，只要使得闭合回路内的磁通量发生变化，闭合回路内都会“感应”出电流。法拉第把这种现象与静电感应现象作类比，形象地把这种电流称为“**感应电流**”（induction current），感应电流的出现，说明回路中有电动势存在，这种电动势称为**感应电动势**（induction electromotive force）。

14.1.2 楞次定律

楞次定律（lenz law）是用来判断感应电流方向的定律，它是俄国科学家楞次在 1834 年提出的。楞次定律的表述如下：**闭合回路中感应电流的方向，总是使得感应电流所激发的磁场阻碍引起感应电流的磁通量的变化。**

下面, 我们通过一个实例来说明如何用楞次定律判断感应电流的方向。如图 14.5 (a) 所示, 在竖直平面内有一个导体圆环, 当条形磁铁的 N 极从圆环的右边插入圆环时, 磁铁产生的磁场方向从右向左, 且通过圆环的磁通量在增大。根据楞次定律, 圆环中感应电流产生的磁场方向必须从左向右, 才能阻碍引起感应电流的磁通量的变化, 根据右手螺旋法则, 圆环内感应电流的方向必如图 14.5 (a) 中圆环上的箭头所示。而当磁棒从圆环内拔出时, 如图 14.5 (b) 中所示, 圆环内的磁通量在减少, 所以圆环上感应电流产生的磁场方向需与条形磁铁产生的磁场方向一致, 以阻碍磁通量的减少, 所以由右手螺旋法则, 可判断此时圆环内的感应电流的方向如图 14.5 (b) 圆环上的箭头所示。

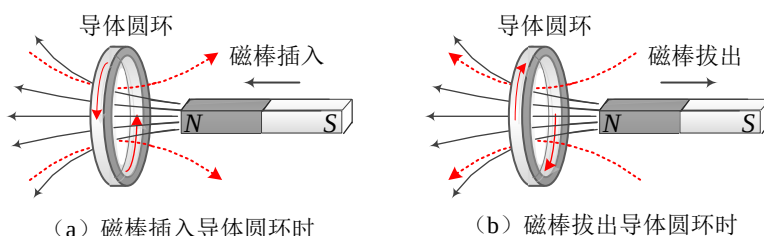


图14.5 楞次定律的应用

从本质上来讲, 楞次定律是系统能量守恒在电磁感应中的具体体现。从图 14.5 (a) 中可以看到, 当磁棒的 N 极向着圆环运动时, 圆环中感应电流产生的磁场相当于在向着磁铁的一侧出现了 N 极, 它将阻碍磁铁向它运动。反之, 当磁铁的 N 极背离圆环而去时, 如图 14.5 (b) 所示, 感应电流产生的磁场相当于在向着磁铁的一侧出现了 S 极, 它将吸引磁铁阻碍它离去。因此磁铁在运动时, 外力要克服磁场阻力而做功, 根据能量守恒定律, 此功就转化为圆环中的感应电流产生的焦耳热。

14.1.3 法拉第电磁感应定律

法拉第在 1831 年 8 月 29 日第一次发现了电磁感应现象, 随后又对电磁感应现象作了深入研究, 总结了产生感应电流的几种情况, 提出了磁力线、感应电动势等概念, 为电磁感应定律的最终形成做出了卓越的开创性贡献。法拉第电磁感应定律可表示为: 不

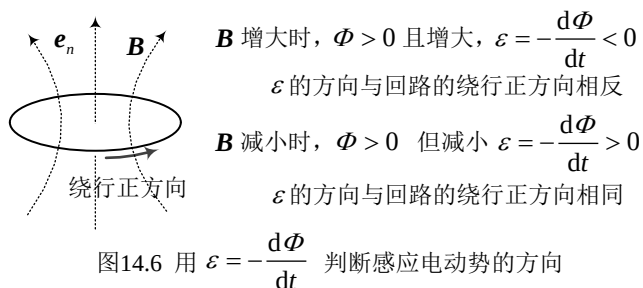
论是什么原因，只要使得穿过导体回路中的磁通量发生变化，回路中就会有感应电动势，其大小与通过该回路的磁通量的变化率成正比。在采用国际单位制时，其数学表达式为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (14.1)$$

式中的负号是楞次定律的数学表现，或者说我们可以利用式中的负号，来确定回路中感应电动势的方向。具体方法如下：**首先**选定回路的绕行正方向，则该回路所围曲面的法线正方向就随之而定了，如图 14.6 所示（一般来说回路的绕行正方向的选择是任意的，但为了方便起见，建议取与通过该回路的磁场方向成右手螺旋关系的方向为绕行正方向）；**然后**用 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 计算通过该回路所围曲面的磁通量；**接着**用式（15.1）计算感

应电动势；**最后**根据 ε 的正负号来判断感应电动势的方向。若 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ，表明感应电动势的方向与选定的绕行正方向一致；若 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ，表明感应电动势的方向与选定的绕行正方向相反。

不难看出，用法拉第电磁感应定律和楞次定律两种方法判断感应电动势的方向，得到的结论一定是相同的。在实际应用中，我们可以根据具体情况，灵活使用。也可以用 $\varepsilon = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right|$ 先求回路中感应电动势的大小，再用楞次定律判断感应电动势（电流）的方向。



应该明确，如果构成回路的材质不是导体，则回路中不存在感应电动势，但 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的值仍可能存在（不为零）。换句话说，**感应电动势只能存在于导体或导体回路中。**

如果导体回路由 N 匝线圈构成，并且通过每一匝线圈的磁通量均相等，则总感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (14.2)$$

式中， $\Psi = N\Phi$ 称为**磁链**（linked flux）。

如果闭合回路的电阻为 R ，则回路中的总感应电流为

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} \quad (14.3)$$

利用 $I = \frac{dq}{dt}$ ，在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{N}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad (14.4)$$

式中， Φ_1 、 Φ_2 分别是 t_1 、 t_2 时刻通过导线回路所围面积的磁通量。

比较式（14.3）和式（14.4）可见：感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关，变化率越大，感应电流越强；而通过导线横截面的感应电荷只与磁通量的变化量有关，与磁通量随时间的变化率无关。

例 14.1 交流发电机的原理如图 14.7 所示，在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，有一个匝数为 N ，面积为 S 的矩形线圈，线圈绕固定轴 oo' 以角速度 ω 作匀速转动。设 $t=0$ 时，线圈平面与磁场垂直，试求线圈中的感应电动势。

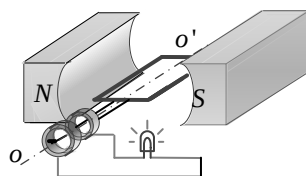


图14.7 交流发电机原理

解：由题意可知，在 t 时刻线圈平面的法线方向与磁感应强度之间的夹角为 $\theta = \omega t$ ，则穿过线圈平面的磁通量为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$$

由式（14.2）可得线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t$$

式中 $\varepsilon_m = NBS\omega$ 是感应电动势的最大值。若线圈的转速为 f 转/秒，则 $\omega = 2\pi f$ ，上式可表示为

$$\varepsilon_i = \varepsilon_m \sin 2\pi ft$$

上式表明，感应电动势随时间 t 按正弦规律变化。由交变电动势产生的电流称为交流电， f 称为交流电的频率。在我国，工业和民用交流电的频率是 50Hz。

例 14.2 一根长直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，式中 I_0 、 ω 均是常量，一个矩形线圈 ABCD 与长直导线共面，线圈的总匝数为 N ，其中 AB 边与长直导线平行，线圈的各部分尺寸如图 14.8 所示。假定线圈闭合后回路的总电阻为 R 。试求：

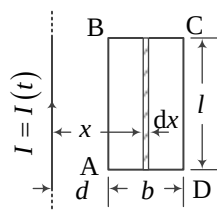


图14.8 例14.2的图

- (1) 任一时刻线圈内的感应电动势及感应电流；
- (2) 在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量。

解：(1) 电流 I 在距离直导线 x 处产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

当 $I > 0$ 时， $\mathbf{B}$ 的方向垂直纸面向里。选顺时针为回路的绕行正方向，在回路中取一个长条形面元 $ds = ldx$ （如图中阴影所示），则通过该面元的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

在 t 时刻，通过整个线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I_0 l \sin \omega t}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right)$$

由法拉第电磁感应定律，线圈内的感应电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \frac{d}{dt} (\sin \omega t) \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 l N \omega}{2\pi} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

回路内的感应电流为

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 I_0 l N \omega}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) \cos(\omega t)$$

其方向将随余弦值的正负作逆时针或顺时针转向的变化。

- (2) 在 t_1 至 t_2 时间内通过导线上任一横截面的感应电量为

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \frac{N}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \\ &= \frac{\mu_0 I_0 l N}{2\pi R} \ln \left(\frac{d+b}{d} \right) [\sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_2)] \end{aligned}$$

例 14.3 在例 14.2 中, 如果导线中电流 I 恒定不变, 总匝数为 N 的矩形线圈 $ABCD$ 沿垂直于直导线方向以速度 v 向右匀速运动, 设初始时刻 AB 边与长直导线的距离为 d , 如图 14.9 所示。试求: 任意时刻 t 线圈内的感应电动势。

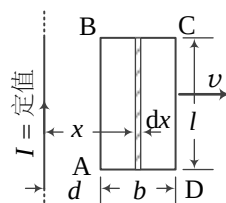


图14.9 例14.3的图

解: 电流 I 在线圈内产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

方向垂直纸面向内。取顺时针方向为线圈的绕行正方向, 则通过图中长条形面元 $ds = ldx$ 的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

又在 t 时刻, AB 边距离直导线的距离为 $d + vt$, 所以 t 时刻通过线圈回路的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{d+vt}^{d+b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} [\ln(d + b + vt) - \ln(d + vt)]$$

根据法拉第电磁感应定律, 可得感应电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{\mu_0 Ilv}{2\pi} \left[\frac{1}{d + b} - \frac{1}{d + b + vt} \right]$$

不难看出此 $\varepsilon_i > 0$, 所以感应电动势的方向与回路的绕行方向一致, 即沿顺时针方向。

比较例题 14.2 和 14.3, 不难发现, 尽管在线圈回路内都产生了电磁感应现象, 但两例中使磁通量发生变化的原因不相同。前者是由磁场的变化所引起的, 后者是由线圈相对于磁场做相对运动引起的。为了简单起见, 我们将在恒定磁场中, 由于导体回路或一段导线相对于磁场运动时产生的感应电动势称为**动生电动势**, 而将导体回路固定不动时, 仅由于磁场的变化产生的感应电动势称为**感生电动势**。

下面我们将讨论动生电动势、感生电动势产生的原因、及其另外一种电动势的计算方法。

§ 14.2 动生电动势

14.2.1 动生电动势

动生电动势 (motional electromotive force) 是指: 在恒定磁场中, 导体回路或一段导线相对于磁场运动时产生的感应电动势。在导体内有电动势, 说明在导体内一定存在着

某种非静电力。那么产生动生电动势的非静电力是什么力呢？下面，我们通过一个简单的例子来探讨产生动生电动势的原因及其计算方法。

如图 14.10 所示，在均匀磁场 $\mathbf{B}$ 中有一个矩形导体滑轨，长度为 l 的导线 AB 在滑轨上以速度 v 向右作匀速直线运动，并与导轨保持良好接触（构成一个闭合导体回路），速度方向与导线 AB 垂直。由法拉第电磁感应定律及楞次定律容易算出，整个回路内的感应电动势的大小为 $\varepsilon = Blv$ ，方向沿逆时针方向。问题是：该感应电动势存在于回路的哪个部分？产生动生电动势的非静电力是什么力？

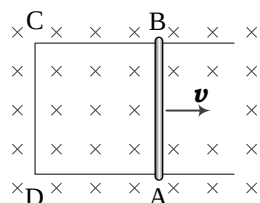


图14.10 动生电动势

显然，该动生电动势只存在于相对于磁场有相对运动的导线 AB 上，而在另外三段上没有感应电动势。这是因为，当导线 AB 段以速度 v 向右作匀速直线运动，导线内的自由电子受到了洛伦兹力 $\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的作用，则作用于单位正电荷上的洛伦兹力为

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其大小为 $E_k = vB \sin \theta$ ，方向：A→B。而其它三段是静止的，导线内的自由电子不受洛伦兹力作用。根据电动势的定义，把单位正电荷沿着导线 AB，从 A 端移动到 B 端时，非静电力做的功（即 AB 上动生电动势）为

$$\varepsilon = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l vB dl = Blv$$

电动势的方向：A→B。这也就是整个回路的动生电动势，方向沿逆时针方向。这个结果显然与根据法拉第电磁感应定律得到的结果是相同的。由此可知，**产生动生电动势的非静电力就是洛伦兹力。**

一般情况下，磁场可以不均匀，导线上各部分的运动速度可以不相同。于是在计算动生电动势时，首先需在导线上任取一个以速度 $\mathbf{v}$ 运动着的线元 $d\mathbf{l}$ ，则该线元上的动生电动势为

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14.5)$$

则整个运动导线上的动生电动势的大小为

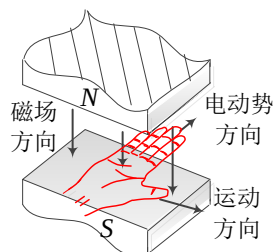


图14.11 用右手定则判断动生电动势的方向

$$\varepsilon = \int_A^B \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (14.6)$$

式 (14.5) 和式 (14.6) 是计算动生电动势的基本公式。

动生电动势的方向可由 ε 的正负号来判断。当 $\varepsilon > 0$ 时, ε 的方向与 $d\mathbf{l}$ 的方向 (积分方向) 相同; $\varepsilon < 0$ 时, 则相反。一般情况下, ε 的方向就是 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 在 $d\mathbf{l}$ 上的投影方向。此外 ε 的方向也可以用高中物理中学习过的右手定则来判断, 如图 14.11 所示。

例题 14.4 如图 14.12 所示, 在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的均匀磁场中, 一根长为 L 的导体棒 oa 在与磁场垂直的平面内绕其端点 o 以角速度 ω 匀速旋转。试求棒两端的动生电动势的大小, 并判断 o 、 a 两端点哪端电势高。

解: 在导体棒上距离 o 点为 l 处取一个“棒元” $d\mathbf{l}$, 其速度大小为 $v = \omega l$, 方向如图所示, 则该“棒元”上的动生电动势为

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= vB \sin 90^\circ \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos 180^\circ = -\omega l B dl \end{aligned}$$

所以总动生电动势大小为

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L -\omega l B dl = -\frac{1}{2} \omega B L^2$$

式中的负号表示动生电动势的方向从 a 指向 o , 即 o 点电势高 (相当于电源的正极)。

例题 14.5 在一根长直导线旁有一根与之共面的、长为 L 的导体棒 ab , 直导线中通有恒定电流 I 。开始时, 导体棒与长直导线的位置关系如图所示。当直导线以速度 $\mathbf{v}$ 向右作匀速直线运动时, 试求: 运动开始后的任一 t 时刻棒上的动生电动势。

解: 在 t 时刻, 棒上 a 端距离长直导线的距离为 $d + vt$ 。在棒上距离 a 点为 l 处取一个“棒元” $d\mathbf{l}$, 如图 14.13 所示, 则该“棒元”离长直导线的距离为

$$x = d + vt + l \cos \theta$$

所以恒定电流 I 在该“棒元”处产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d + vt + l \cos \theta)}$$

在棒所在一侧, 磁场的方向垂直纸面向内。所以该“棒元”上的动生电动势为

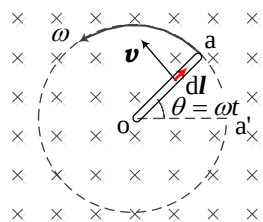


图14.12 例14.4的图

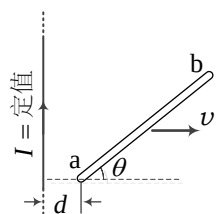


图14.13 例14.5的图

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \sin 90^\circ \cdot dl \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \frac{v\mu_0 I \sin \theta}{2\pi(d + vt + l \cos \theta)} dl \end{aligned}$$

总动生电动势为

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^L \frac{\mu_0 v I \sin \theta}{2\pi(d + vt + l \cos \theta)} dl$$

$$= \frac{\mu_0 v I \tan \theta}{2\pi} \ln \frac{d + vt + L \cos \theta}{d + vt}$$

因 $\varepsilon > 0$ ，所以动生电动势的方向从 a 指向 b，b 端电势高。

1831 年 10 月 28 日，法拉第用强磁铁和铜圆盘，设计了一个新的实验，其示意图如图 14.15 所示。当铜圆盘绕轴线匀速旋转时，获得了持续稳定的感应电流。其原理就是铜圆盘在转动时切割了磁感线，沿径向方向产生了动生电动势。

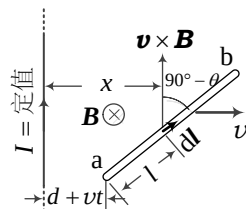


图14.14 例14.5解题用图

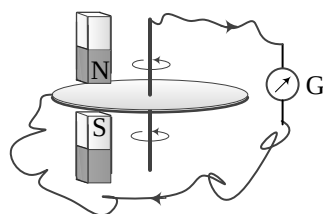


图14.15 法拉第的圆盘实验产生持续感应电流的示意图

§ 14.3 感生电动势 感生电场

14.3.1 感生电动势 感生电场

现在来讨论当导体回路静止不动时，仅仅因为磁场的变化所产生的感应电动势，我们将这样的感应电动势称为**感生电动势**（induced electromotive force）。假设在一个半径为 R 的圆柱形空间中有一个随时间变化的磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ ，导体回路 L 、在磁场内部的导体棒 ab，以及在磁场外部的导体棒 cd 相对于磁场都静止不动，如图 14.16 所示。

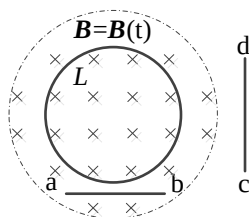


图14.16 随时间变化的磁场中的导体回路和导体棒

实验发现，只要磁感应强度 $\mathbf{B}$ 随时间变化，一般情况下，导体回路 L 、导体棒 ab 和 cd 上都有感生电动势。由于导体回路或导体棒相对于磁场都没有运动，所以产生感生电动势的非静力不是洛仑兹力。那么，它是什么力呢？

为此，麦克斯韦在分析研究后于 1861 年提出了感生电场假设：**随时间变化的磁场在**

其周围空间要激发一种电场，这种电场称为**感生电场**（induced electric field），或称**涡旋电场**（eddy electric field）。

麦克斯韦利用感生电场假设，圆满地解释了产生感生电动势的原因。他认为：无论是否存在导体或导体回路，变化的磁场总要在其周围空间激发感生电场。如果在此空间内有导体存在，则导体中的自由电荷就会在感生电场力的作用下作定向运动，从而在导体内产生感生电动势，当导体形成闭合回路时就会产生感应电流。所以**产生感生电动势的非静电力就是感生电场力**。

若用符号 $\mathbf{E}_B$ 表示变化的磁场所激发的感生电场的电场强度。根据电动势的定义，在一段长为 $d\mathbf{l}$ 的导体“棒元”上的感生电动势为

$$d\varepsilon_i = \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.7)$$

其方向就是感生电场 $\mathbf{E}_B$ 在“棒元” $d\mathbf{l}$ 上的投影方向。于是一段导线 ab 上的感生电动势为

$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = \int_a^b \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.8)$$

对于一个闭合导体回路 L ，回路内的感生电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} \quad (14.9)$$

式中 Φ 是通过闭合回路 L 所围曲面的磁通量。式（14.7）、式（14.8）及式（14.9）是计算感生电动势的常用计算式。

由于磁通量 $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ，同时考虑到回路 L 及其所围的曲面静止不动，即不随时间变化，将之代入式（14.9），可得

$$\oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (14.10)$$

式中 S 是以闭合回路 L 为周界的任意曲面，曲面 S 的法线正方向与回路 L 的绕行方向成右手螺旋关系。式（14.10）给出了感生电场与磁感强度对时间的变化率 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 之间的积分关系。此式也说明了感生电场的一个重要性质：感生电场是非保守力场。式（14.10）是电磁场理论的基本方程之一。

那么，感生电场是一种什么性质的场呢？它和静电场有何异同？我们知道，静电场

是由静止的电荷产生的，静电场的性质由静电场的环路定理和高斯定理给出，即：

$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 和 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$ ，所以静电场是有源的保守力场，静电场的电场线一般

起始于正电荷、终止于负电荷，不可能形成闭合曲线。

感生电场是由变化的磁场激发的，与静止电荷无关，它的性质由式（14.10）和下式给出

$$\oiint_S \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14.11)$$

即感生电场是无源的非保守力场，所以感生电场的电场线都是闭合曲线，也正是因为这样，感生电场又称为涡旋电场。

感生电场与静电场唯一的相同点就是对电荷的作用规律相同，即电荷受到的两种电场力均可以用 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 表示。

14.3.2 感生电场 感生电动势的计算

下面举例说明感生电场和感生电动势的计算。

例 14.6 一半径为 R 的无限长直螺线管，其横截面如图 14.17 所示，磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的磁场均匀分布在螺线管内，方向平行管轴向里，其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。试求：感生电场 $\mathbf{E}_B$ 的空间分布。

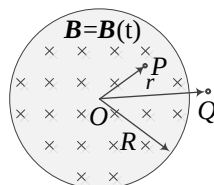


图14.17 例14.6的图

解：一般情况下，计算感生电场的空间分布规律是很难的，超出了大学物理课程的基本要求。本题是大学物理课程中仅有的一个可以计算感生电场分布规律的实例。

由于螺旋管内的磁场分布具有轴对称性，感生电场具有涡旋性，所以变化的磁场所激发的感生电场的电场线在管内、外均是螺线管共轴的同心圆。且 $\mathbf{E}_B$ 的方向沿圆周切线方向，在同一电场线上 $\mathbf{E}_B$ 的大小处处相等。为此，以螺线管中心轴上的 O 点为圆心， r 为半径作一圆形积分回路 L ，并取顺时针方向为回路绕行正方向，如图 14.18 所示，则由式（14.10），有

$$\oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_B = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

即

$$E_B = -\frac{1}{2\pi r} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 S 是回路 L 所围的面积。

当 $r \leq R$ 时, 场点 P 在管内, 回路所围面上各点的 $\frac{dB}{dt}$ 相等且和面法线方向平行, 故

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

所以螺线管内感生电场的大小为

$$E_B = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

当 $r \geq R$ 时, 场点 Q 在管外, 考虑到螺线管外的磁场为零, 通过 L 所围面积的磁通量就等于螺线管截面的磁通量, 即

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

即螺线管外感生电场的大小为

$$E_B = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

E_B 的大小与 r 的关系曲线如图 14.18 所示。

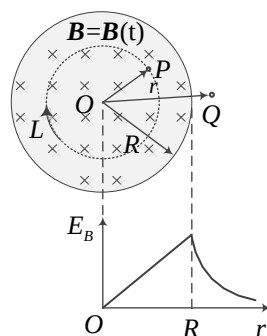


图14.18 例14.6解的图

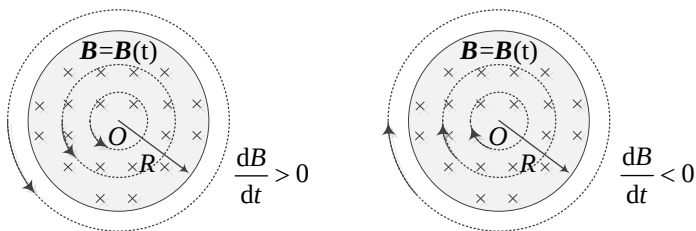


图14.19 长直螺线管横截面上的感生电场线

如果 $\frac{dB}{dt} > 0$, 则 $E_B < 0$, 表明 E_B 的方向就是与绕行正方向**相反**的切线方向; 如果

$\frac{dB}{dt} < 0$, 则 $E_B > 0$, E_B 的方向就是与绕行正方向**相同**的切线方向。不难发现: 若 L 为

闭合导体回路，则回路内感应电流的方向与感生电场线的方向一致。换句话说 $\mathbf{E}_B$ 的方向也可以用楞次定律来判断，如图 14.19 所示。

例 14.7 如图 14.20 所示，半径为 R 的圆柱形空间内有一均匀磁场，磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向与圆柱的轴线平行。将一长为 L 的导体棒 ab 置于磁场中，圆心到棒的垂直距离为 h 。试求：当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时，棒中的感生电动势。

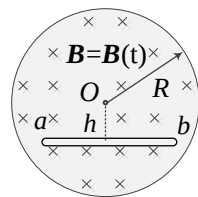


图14.20 例14.7的图

解：（方法一） 以圆心 O 到棒的垂足 o 为坐标原点建立 x 轴，在棒上距 o 为 x 处取一“棒元” dx 。由例题 14.6 可知，该处感生电场的大小为

$$E_B = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

方向如图 14.21 (a) 所示。该“棒元”上的感生电动势为

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{x} = E_B \cos \theta dx \\ &= \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \cdot \frac{h}{r} \cdot dx = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dx \end{aligned}$$

所以 ab 上的感生电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} &= \int d\varepsilon = \int_{x_a}^{x_b} \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dx \\ &= \frac{1}{2} h \frac{dB}{dt} (x_a - x_b) = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

方向由 $a \rightarrow b$ 。

（方法二）： 用法拉第电磁感应定律求解

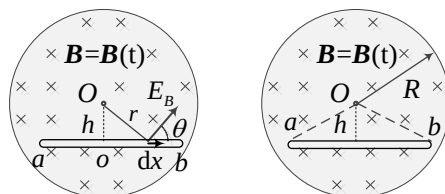
假想用导线连接 Oa 、 Ob ，构成一个三角形导体回路 Oab 。则通过此回路的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{1}{2} hLB$$

由法拉第电磁感应定律，回路中感应电动势的大小为

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$$

又 $\varepsilon_i = \varepsilon_{Oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bO}$ ，同时注意到， Oa 、 Ob 沿径向放置，与感生电场方向垂直，所以



(a) 方法一用的图 (b) 方法二用的图

图14.21 例14.7解的图

$\varepsilon_{Oa} = \varepsilon_{bO} = 0$ ，由此得棒 ab 上的感生电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_i = \frac{1}{2} hL \frac{dB}{dt}$$

再由楞次定律可知，回路感生电动势的方向为逆时针方向，即由 $a \rightarrow b$ 。

*14.3.3 涡电流

在一些电器设备中，常常会遇到大块导体处在变化的磁场中、或者在磁场中运动的情况，此时在导体内部产生感应电流，这种电流在整块导体内部自成闭合回路，称为**涡电流**。



图14.22 感应炉示意图



图14.23 用涡电流对齿轮进行淬火



图14.24 电磁灶及其高频载流线圈

由于导体的电阻很小，所以涡电流会产生大量的热量。这一现象在冶金、热处理等工程技术以及日常生活中均有大量应用。例如，图 14.22 是冶金工业中常用的电磁感应炉示意图。感应炉的核心是一个高频载流线圈，高频电流在炉内产生高频变化的磁场。感应炉内的铁矿石或铁块本身就是导体，从而在铁矿石中产生强大的涡电流，利用涡电流的热效应可将铁矿石溶化。如图 14.23 是涡电流在热处理（淬火）工程技术中的应用。将齿轮放在一个特制的线圈中，当线圈中接通高频交流电后，电流产生的交变磁场将在齿轮的边缘产生强大的涡电流，从而可将齿轮的边缘加热到所需的温度。现代厨房中的电磁灶同样是利用涡电流来加热食物的，电磁灶的核心部件是一盘线圈，如图 14.24 所示，因此与电磁灶配套使用的锅必须是特制的铁锅或金属锅，电磁灶不能对玻璃或陶瓷容器加热。

利用涡电流还可以产生阻尼作用。如图 14.25 所示，一个金属片做成的阻尼摆，可在两个电磁铁之间摆动。如果电磁铁的线圈中不通电，则金属摆可以来回摆动很长时间才会停下来。当电磁铁的线圈中通电时，电磁铁的两极之间就会出现强磁场。金属摆在磁场中摆动时金属片内就会产生涡电流。根据楞次定律，涡电流的作用要阻碍金属片相对于磁场运动，从而使金属摆很快地停止摆动。由于这种阻尼起源于电磁感应，所以称为**电磁阻尼**。

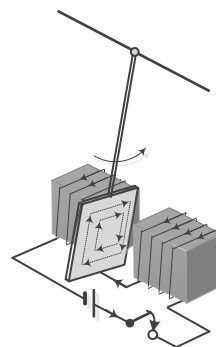


图14.25 电磁阻尼

涡电流的热效应虽然有广泛的应用，但在有些情况下，涡电流的热效应是有害的。例如变压器和电机中的铁芯，由于铁芯总是处在交变磁场中，铁芯内的涡电流会使铁芯发热，这不仅消耗了部分电能，降低电机的效率，还会因铁芯严重发热而不能正常工作。为了减少涡电流的热损耗，一般的变压器、电

机等的铁芯都是用彼此绝缘的硅钢片叠合而成，从而能大大减小涡电流，降低因涡电流产生的热损耗。

§ 14.4 自感与互感

由法拉第电磁感应定律已知，无论以怎样的方式使穿过闭合回路的磁通量发生变化，此闭合回路内就一定会产生感应电动势。而电流的变化又是引起磁场变化的重要原因，因此电流的变化与感生电动势之间有着直接联系。作为法拉第电磁感应定律的应用，自感和互感现象就是这方面规律的具体体现。

如图 14.26 所示，在通有电流 I_1 的闭合回路 1 附近，有另一个通有电流 I_2 的闭合回路 2。我们将仅由回路 1 中的电流 I_1 的变化在其自身回路 1 中产生的电磁感应现象称为**自感现象**（self-induction），其电动势称为**自感电动势**，并用 ε_L 表示；而把回路 2 中的电流变化在回路 1 中

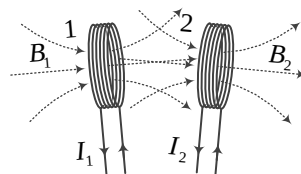


图14.26 两个回路（线圈）之间的自感与互感

产生的电磁感应现象称为**互感现象**（mutual induction），相应的电动势称为**互感电动势**，并用 ε_M 表示。下面我们分别讨论这两种感应电动势。

14.4.1 自感电动势 自感

通过线圈自身的电流发生变化时，将会引起穿过线圈自身回路的磁通量发生变化，由此产生电磁感应现象称为**自感现象**，对应的感应电动势叫做**自感电动势**。

考虑一个由 N 匝线圈组成的闭合回路。如图 14.27 所示，设其中电流为 I ，由毕奥—萨伐尔定律可知，该电流在空间任意一点产生的磁感应强度 B 的大小都与 I 成正比，因此穿过回路自身所围面积的磁通量 Φ 和磁链 Ψ 也与 I 成正比，即

$$\Psi = LI \quad (14.12)$$

式中 L 为比例系数，称为**自感系数**，简称**自感**（self-inductance）（注意：在电工、电子技术中，常把线圈的自感称为**电感**）。上式还可写为

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (14.13)$$

它表明，线圈的自感（或电感）在数值上等于线圈中的电流为 1 个单位时，该电流产生

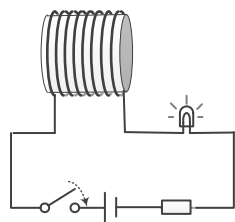


图14.27 线圈的自感现象

的磁场穿过自身线圈的磁链。

根据法拉第电磁感应定律，线圈中的自感电动势为

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

如果回路的形状、大小、匝数和线圈内介质的磁导率均不随时间变化，则 L 为一常量，

$$\frac{dL}{dt} = 0, \text{ 因而}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} \quad (14.14)$$

或

$$L = \frac{-\varepsilon_L}{dI/dt} \quad (14.15)$$

式 (14.15) 表明，一个给定线圈的自感在数值上还等于当线圈中的电流随时间的变化率为 1 个单位时，在自身线圈中产生的自感电动势。式 (14.14) 中的负号也是楞次定律的数学表示，它表示自感电动势总要反抗线圈中电流的变化。当线圈中电流增大时，自感电动势的方向与原电流方向相反；当线圈中电流减小时，自感电动势的方向与原电流方向相同。

在国际单位制中，自感 L 的单位为亨利，符号为：H

$$1\text{H} = 1\text{wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$$

自感现象在电工、电子技术中有重要应用。例如在无线电设备中常用自感线圈和电容器构成谐振电路或滤波电路等；传统日光灯中的镇流器就是利用自感现象的典型例子。镇流器是一个带铁芯的线圈，其自感很大。在接通电源后，利用启辉器的断路作用而产生一个很大的自感电动势，并加到日光灯管上，使得管内的汞蒸汽电离，电离后的汞离子通过热运动打在灯管的荧光粉上，从而把日光灯管点亮。

在有些情况下，自感现象非常有害。一般的家用电器或工业电器内部都有线圈，当电路被断开或接通时，由于电流的突变，会产生较高的自感电动势，在开关处形成电弧。这就是在插、拔插头时，插头处会冒出电火花的原因。这在某些场合可能会引起爆炸等灾难性事故，例如加油站、煤气站、煤矿、粉尘车间等，在那些地方，所有的电器开关必须使用特制的灭弧装置，才能保证安全生产。

14.4.2 自感的计算

一般来说,线圈的自感与线圈的形状、大小、匝数以及线圈内介质的磁导率有关,当上述参数给定后,线圈的自感也就随之确定了,与线圈是否通电无关。通常,线圈自感的大小由实验测出,只是在某些简单情况下,才可以通过其定义进行估算。

例 14.8 如图 14.28 所示,有一长为 l 的单层密绕直螺线管,横截面积为 S ,总匝数为 N ,管内充满相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质。试求该线圈的自感。

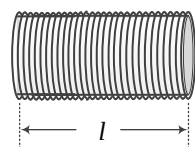


图14.28 例14.8的图

解: (1) 我们知道无限长直螺线管内部的磁场是均匀分布的,磁场的方向平行于螺线管的轴线,磁感强度的大小为

$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

式中 n 是沿轴线方向单位长度内线圈的匝数。在本题中,虽然螺线管的长度 l 有限,但只要 $l \gg \sqrt{S}$, 或者 $\mu_r \gg 1$, 管内磁场仍然可以近似看成是均匀分布的。于是通过螺线管任一横截面的磁通量为: $\Phi \approx BS = \mu_0 \mu_r n I \cdot S$, 通过整个线圈的磁链为

$$\Psi = N \Phi = N \mu_0 \mu_r n I S = N \mu_r \frac{N}{l} I S = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} I S$$

式中, $V = lS$ 为螺线管的体积。由自感定义式 $L = \Psi/I$, 可得螺线管的自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V \quad (14.16)$$

由此可见,螺线管的自感系数 L 与它的体积 V , 单位长度上线圈匝数 n 的平方和管内介质的相对磁导率 μ_r 成正比。为了得到自感系数较大的螺线管,通常可以采用较细的导线制成绕组,以增加单位长度上线圈的匝数;当然最好的办法就是将线圈绕在相对磁导率很大的铁磁质上。

由于有漏磁现象(部分磁感线实际上没有穿过所有的线圈回路),螺线管的自感实际上小于由上式计算的结果。

例 14.9 截面为矩形的密绕螺绕环线圈共有 N 匝,其尺寸如图 14.29 所示,环内介质的相对磁导率为 μ_r 。试求:

- (1) 该螺绕环的自感;
- (2) 当线圈通有电流 $i = I_0 \cos \omega t$ 时,线圈上的自感电动势。

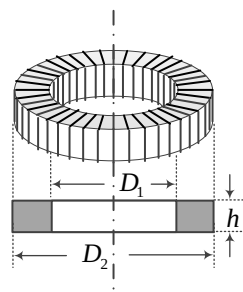


图14.29 例14.9的图

势。

解：(1) 因为螺绕环内的磁场具有轴对称性，作一个半径为 r 的同轴圆环，由安培环路定律 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ ，可得

$$2\pi r H = NI$$

即

$$H = NI / 2\pi r$$

所以环内磁感应强度的大小为

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$$

通过环内任一截面的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int B \cdot dS = \int_{D_1/2}^{D_2/2} \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 \mu_r NI h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

由自感的定义，可得自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

(2) 当 $i = I_0 \cos \omega t$ 时，自感电动势的大小为

$$\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h \omega}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \sin \omega t$$

14.4.3 互感电动势 互感

若有两个邻近的线圈 1 和线圈 2，如图 14.26 所示，当线圈 1 中的电流 I_1 变化时，它在周围空间激发的磁场也要随时间变化，使得通过线圈 2 的磁链 Ψ_{21} 发生变化，从而在线圈 2 中产生电磁感应现象。反之亦然。这种现象称为**互感现象** (mutual induction)，相应的电动势称为**互感电动势**。

现假设线圈 1 中通有电流 I_1 ，该电流产生的磁场分布为 $\mathbf{B}_1$ ，由毕奥-萨伐尔定律可知， $\mathbf{B}_1 \propto I_1$ ，所以它通过线圈 2 的磁通量 Φ_{21} 及磁链 Ψ_{21} 均与电流 I_1 成正比，即

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1$$

反之线圈 2 中的电流 I_2 产生的磁场 $\mathbf{B}_2$ 通过线圈 1 的磁链 Ψ_{12} 与 I_2 成正比，即

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2$$

上两式中 M_{21} 和 M_{12} 均为比例系数, 分别称为线圈 1 对线圈 2 的互感系数和线圈 2 对线圈 1 的互感系数。理论和实验都证明, M_{21} 和 M_{12} 的大小相等, 可以统一用符号 M 表示, 称为两个线圈之间的**互感系数**, 简称**互感** (mutual inductance)。于是, 两线圈之间**互感系数**的定义为

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (14.17)$$

上式表明, 两线圈之间的互感在数值上等于当其中一个线圈上的电流为 1 个单位时, 它在另一个线圈中产生的磁链。

此外, 由法拉第电磁感应定律可知, 当线圈 1 中的电流 I_1 改变时, 通过线圈 2 的磁链将发生变化, 于是在线圈 2 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (14.18)$$

同理, 线圈 2 中的电流 I_2 发生变化时, 在线圈 1 中产生的互感电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (14.19)$$

由此可得互感系数的另一种定义为

$$M = -\frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt} = -\frac{\varepsilon_{12}}{dI_2/dt} \quad (14.20)$$

此定义表明, 两个线圈的互感在数值上还等于当其中一个线圈中电流的变化率为 1 个单位时在另一个线圈中产生的互感电动势的大小。

互感的单位与自感的单位相同, 也是亨利, 符号: H。

互感现象在现代工农业生产和电工电子技术中有广泛的应用。变压器是一个重要的例子。在传输电能时, 通过升压变压器提升电压, 来降低输电线路的损耗, 提高输电效率。而在用户端或电子设备中, 需要通过降压变压器来获得所需的工作电压。但互感现象也有不利甚至有害的一面, 例如有线电话有时因两条线路之间的互感产生串音干扰, 或使信号在传播过程中容易泄密等等。

14.4.4 互感的计算

与自感一样, 两线圈之间的互感 (系数), 一般来说, 与线圈上是否通电无关。互感

的大小只与两个线圈的几何形状、大小、匝数以及线圈之间的相对位置有关，还与线圈周围磁介质的分布有关。通常，两线圈之间互感的大小由实验测出，只是在某些简单情况下，才可以通过其定义进行估算。

例 14.10 两个长度均为 l 、同轴密绕的螺线管线圈 1 和线圈 2，两个线圈的匝数分别为 N_1 、 N_2 ，半径分别为 R_1 、 R_2 ，并假定 $l \gg R_2 > R_1$ 。试求两线圈之间的互感。

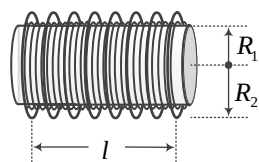


图14.30 例14.10的图

解：设螺线管 2 中通有电流 I_2 ，由磁场的安培环路定律可得，螺线管内的磁场强度为

$$H = n_2 I_2 = \frac{N_2 I_2}{l}$$

螺线管 2 内部的磁感应强度的大小为

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

方向与电流 I_2 成右手螺旋关系。于是穿过螺线管 1 的磁链为

$$\Psi_{12} = N_1 B S_1 = N_1 \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l} \pi R_1^2$$

所以互感为

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2}{l} \pi R_1^2$$

利用例题 14.8 的结果，即式 (14.16) 可知两个螺线管的自感为

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 V_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi R_1^2$$

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 V_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi R_2^2$$

所以有

$$M = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{L_1 L_2}$$

必须指出，上述结果仅在 $l \gg R_2$ 的条件下近似成立。而在一般情况下， $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ ，且 $k \leq 1$ ， k 称为耦合系数。只有当 $R_2 = R_1$ ，且 $l \gg R_2$ 时，才有 $k = 1$ 。因为在一般情况

下总会有漏磁，即有些磁感线不能通过所有的线圈回路，即使 $R_2 = R_1$ ，仍然有 $M < \sqrt{L_1 L_2}$ 。

例 14.11 如图 14.31 所示，半径分别为 R 和 r ，匝数分别为 N_1 和 N_2 的两个共轴圆线圈，相距为 d ，两线圈平面相互平行，且 $R \gg r$ 。试求

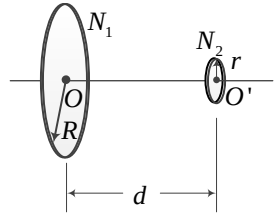


图14.31 例14.11的图

(1) 两线圈的互感系数；

(2) 当大线圈通以电流 $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 时，小线圈中的互感电动势，式中 I_0 、 ω 、 φ 均是大于零的常数。

解：(1) 设大线圈中通电流 I_1 ，它在小线圈圆心 O' 点的磁感应强度的大小为

$$B_{21} = N_1 \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

由于 $d \gg r$ ，可认为小线圈中的磁场基本上是均匀的。则通过小线圈的磁链为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_{21} \pi r^2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 I_1 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

所以两线圈之间的互感为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

(2) 由题意可知，大线圈中的电流为 $I_1 = I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ 。根据法拉第电磁感应定律，可得小线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_2 = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} I_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

§ 14.5 磁场的能量

14.5.1 线圈的自感磁能

在电场中，电容器是储存电能的器件，电场的能量存在于充电电容器产生的电场中。在磁场中，用于储存磁场能量的器件是线圈，磁场的能量存在于载流线圈产生的磁场中。

下面，我们用类似于讨论电场能量的方法，来讨论磁场的能量。

如图 14.32 所示，是一个含有电阻 R 和线圈 L 的电路。当未闭合开关 k 时，线圈中的电流为零；当闭合开关 k 时，线圈中的电流由零开始逐渐增大，线圈中将产生自感电动势 ε_L 。由于自感电动势要反抗电流的变化，因此回路中的电流不能立即达到稳定值，而是有一个逐渐增大的过程。可以证明，开关 k 合上后，电流 i 随时间 t 的函数曲线如图 14.33 所示。

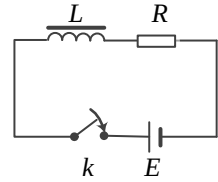


图14.32 RL电路

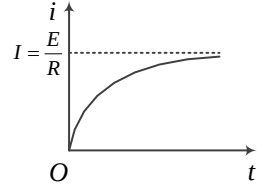


图14.33 RL电路中的 $i - t$ 曲线

假设电源的电动势为 E ，在 t 时刻，回路中的电流为 $i = i(t)$ ，线圈中的自感电动势为 $\varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$ ，由闭合回路的欧姆定律，可得

$$E + \left(-L \frac{di}{dt} \right) = iR$$

在上式两端同时乘以 idt ，并移项，有

$$Eidt = Lidi + i^2 Rdt$$

如果在 $t = 0$ 时刻，开关 k 刚合上，在 $0 \rightarrow t$ 时间内，电流从 0 增加到稳定值 I ，则有

$$\int_0^t Eidt = \int_0^I Lidi + \int_0^t i^2 Rdt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t i^2 Rdt$$

式中： $\int_0^t Eidt$ 是电源在 0 到 t 时间内提供的总能量； $\int_0^t i^2 Rdt$ 是这段时间内回路电阻所消耗的焦耳热； $\frac{1}{2} LI^2$ 是这段时间内电源反抗自感电动势所作的功。上式标明：电源所提供的总能量一部分消耗在电阻上，转换成焦耳热能；另一部分将反抗自感电动势做功。实际上电源反抗自感电动势所做的功，并没有被消耗掉，而是储存在通电线圈所产生的磁场中，转化为磁场的能量。

由此可知，对于一个自感为 L 的线圈，当通有电流 I 时，线圈内储存的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (14.21)$$

式 (14.21) 称为线圈的**自感磁能公式**。从形式上看，它与电容器的储能公式： $W_e = \frac{1}{2} CU^2$

相似。

16.4.2 磁场的能量和能量密度

我们知道，磁场的性质是用磁感应强度 B 来描述的。既然如此，通电线圈中所储存的磁场能量必与其中的磁感应强度 B 的大小密切相关。为简单起见，我们以长直螺线管为例，来讨论的磁场能量。

当长直螺线管通以电流 I 时，螺线管中磁场的磁感应强度为 $B = \mu n I$ ，螺线管的自感系数 $L = \mu n^2 V$ ，把这些关系代入式 (16.27)，有

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} V$$

式中 V 为长直螺线管的体积。由于长直螺线管内部的磁场为均匀磁场，管外的磁场可以忽略不计，由此可得：单位体积内磁场的能量——称为**磁场的能量密度**为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (14.22)$$

对于各向同性的磁介质，由于 $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$ ，故

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} H B \quad (14.23)$$

这一关系虽然是从特例导出的，但可以证明，它对任意磁场都适用。

在非均匀磁场中，可以将磁场存在的空间划分成无穷多个微小的体积元 dV ，于是体积元内的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV \quad (14.24)$$

在一个给定体积 V 内的磁场能量为

$$W_m = \int dW_m = \int_V w_m dV \quad (14.25)$$

例 14.12 一长直同轴电缆，其芯线是半径为 R_1 的实心导线，包线是半径为 R_2 的薄圆筒形导线，如图 14.34 所示，在芯线与包线之间充满了相对磁导率为 μ_r 的绝缘材料。稳恒电流 I 由芯线流入，包线流出，并且在导线截面上均匀分布。试求：

(1) 同轴电缆内外磁感应强度的分布；

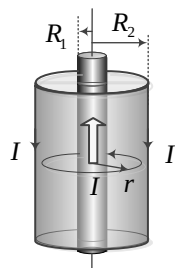


图14.34 例14.12的图 24

(2) 沿电缆轴线方向, 每单位内磁场的能量。

解: (1) 由于电流及其产生的磁场具有“无限长”的轴对称分布, 在与轴线垂直的平面内, 任取一个半径 r 的闭合回路, 由安培环路定律可得:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = \sum I$$

当 $r < R_1$ 时, $\sum I = \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} I$, 所以: $H_1 = \frac{I}{2\pi R_1^2} r$, $B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$

当 $R_1 < r < R_2$ 时, $\sum I = I$, 所以: $H_2 = \frac{I}{2\pi r}$, $B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$

当 $r > R_2$ 时, $\sum I = 0$, 所以: $H_3 = 0$, $B_3 = \mu_3 H_3 = 0$

(2) 由 (1) 可得, 在芯线内部和芯线与包线之间的磁场能量密度分别为

$$w_{m1} = \frac{1}{2} B_1 H_1 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} r^2 \quad (r < R_1)$$

$$w_{m2} = \frac{1}{2} B_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在电缆上任取一个半径分别为 r 、厚度为 dr , 长为 1 的薄圆筒形“体积元”, 其体积 $dV = 2\pi r dr$ 。则该“体积元”内贮存的磁能为

$$dW_m = w_m dV$$

所以该同轴电缆上, 沿轴线单位长度上磁场的能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \int dw_m = \int_0^{R_1} w_{m1} dV + \int_{R_1}^{R_2} w_{m2} dV \\ &= \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^4} 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

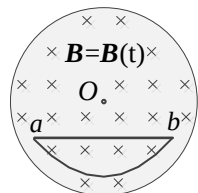
思考题

14.1 在法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中, 负号的意义是什么? 你如何采用直接利用法拉第电磁感应定律的办法来判断感应电动势的方向?

14.2 将一磁棒插入一闭合导体回路中: 一次迅速插入, 一次缓慢插入, 但两次插入的始末位置相同。问在两次插入中, 回路中的感应电动势是否相等? 通过导线横截面的感应电量是否相等? 为什么?

14.3 感生电场与静电场有哪些不同? 它们唯一的相同之处是什么?

14.4 如图所示,在圆柱形空间内有一磁感应强度为 B 的均匀磁场,其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。若在图中 a, b 两点间放置一直导线 $\overline{ab}$ 和一弯曲导线 ab ,试判断哪一根导线中感生电动势比较大?两根导线中感生电动势的方向如何?若将直导线放在圆柱形磁场空间的外部或沿径向放置,导线中还会有感生电动势吗?



题14.4的图

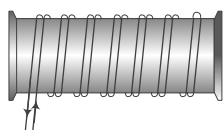
14.5 在某个空间里存在变化的磁场,如果没有导体,那么,在这个空间内是否存在感生电场?是否存在感生电动势?

14.6 在涡旋电场中,是否还可以引入电势和电势差的概念?为什么?

14.7 线圈自感的定义是 $L = \Psi/I$, 这是否表明自感的大小与线圈中电流的大小成反比?如果要设计一个自感较大的螺线管线圈,应该从哪些方面去考虑?

14.8 试说明自感电动势的方向和线圈中电流方向之间的关系。

14.9 有的电阻元件是用电阻丝绕成的,为了使它只有电阻而没有自感,常用双绕法(如图)。试说明为什么要这样绕。



题14.9的图

14.10 有两个相距很近的螺线管线圈,长度相同,半径稍有差别。要使两者的互感最大,应如何放置?要使互感最小,又该怎样放置?

文档: 14.2 第 14 章
电磁感应习题答案

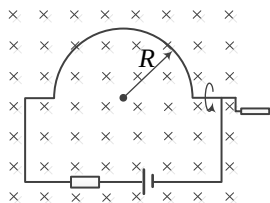
习 题

14.11 如图所示,用一根硬导线弯成半径为 r 的一个半圆,使这根半圆形导线在磁感强度为 B 的匀强磁场中以频率 f 旋转,整个电路的电阻为 R ,试求感应电流的表达式和最大值。

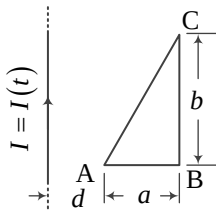
14.12 有一磁感强度为 B 的均匀磁场,以恒定的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 在变化。把一块质量为 m 的铜,拉成截面半径为 r 的细导线,并用这种导线做一个半径为 R 的圆形导体回路,圆形回路的平面与磁感强度 B 垂直。试证明:导体回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

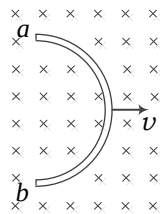
式中 ρ 为铜的电阻率, d 为铜的密度。



习题14.11的图



习题14.13的图



习题14.14的图

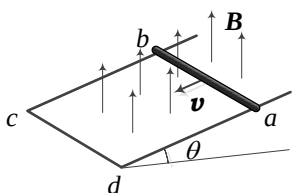
14.13 一根长直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，式中 I_0 、 ω 均是常量，一个直角三角形线圈 ABC 与长直导线共面，线圈的总匝数为 N ，其中 AB 边与长直导线垂直，线圈的各部分尺寸如图所示。假定线圈闭合后回路的总电阻为 R 。试求：任一时刻线圈内的感应电动势及感应电流。

14.14 如图所示，把一半径为 R 的半圆形导线 ab 置于磁感强度为 B 的均匀磁场中，当导线以速率 v 水平向右平动时，试求：导线中感应电动势 ε 的大小，并指出哪一端电势较高。

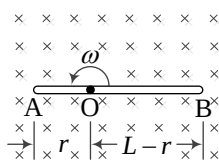
14.15 如图所示，一长为 l ，质量为 m 的导体棒 ab ，在磁感应强度为 B 的竖直磁场中，沿倾角为 θ 的绝缘框架，从静止开始向下滑动。设摩擦阻力可以忽略不计，试求：

(1) 导体棒上任意时刻的动生电动势；

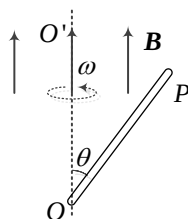
(2) 若框架材质为金属，且导体棒与金属框架始终保持良好接触，使两者形成一个闭合导体回路，回路总电阻 R 为常数，再求任意时刻的动生电动势。



习题14.15的图



习题14.16的图

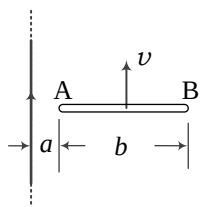


习题14.17的图

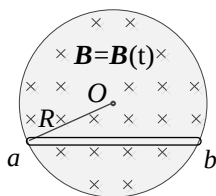
14.16 如图所示，在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，有一根长为 L 的铜棒 AB，正以角速率 ω 绕通过棒上 O 点、且与棒垂直的轴转动，轴的方向与 B 平行。假设转轴到 A 端的距离为 r ，试求：棒两端的电势差 $U_{AB}(=V_A - V_B)$ 。

14.17 如图所示，长为 L 的导体棒 OP，处于均匀磁场中，并绕 OO' 轴以角速度 ω 旋转，棒与转轴间夹角恒为 θ ，磁感强度 B 与转轴平行。试求：棒 OP 在图示位置处的动生电动势。

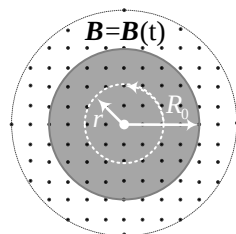
14.18 如图所示，一根与长直导线垂直共面的金属杆 AB，以匀速 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 平行于一长直导线移动，长直导线通有电流 $I = 40 \text{ A}$ ，图中 $a = 0.10 \text{ m}$ ， $b = 1.0 \text{ m}$ 。试求：金属杆 AB 中的感应电动势，并判断杆的哪一端电势较高？



习题14.18的图



习例14.20的图



习例14.21的图

14.19 半径为 $R = 2.0 \text{ cm}$ 的“无限长”载流密绕直螺线管，管内磁场可视为均匀磁场，管外磁场

可近似看作零。若通电流均匀变化,使得磁感强度 B 随时间的变化率 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 为常量,且为正值,试求:

(1) 管内外由变化的磁场激发的感生电场的分布;

(2) 若 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 0.010 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$, 求距离螺线管中心轴 $r = 5.0 \text{ cm}$ 处感生电场的大小和方向。

14.20 在半径为 R 的圆柱形空间中存在着均匀磁场,磁场方向与圆柱的轴线平行。如图所示,有一长为 L 的金属棒放在磁场中,棒的两端恰好在圆周的边缘上。设 B 随时间的变化率为 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 。求证:棒上感应电动势的大小为

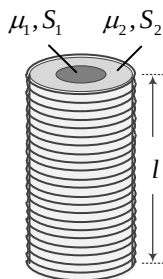
$$\varepsilon = \frac{L}{2} \sqrt{R^2 - (L/2)^2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

14.21 在一个圆柱形空间内有一个大小随时间变化的均匀磁场 B , B 的方向与圆柱的轴线平行。磁场中有一个半径为 R_0 、厚度为 h 、电阻率为 ρ 的导体圆盘,盘面垂直与轴线,盘心在圆柱的中心轴线上,如图所示。当磁场大小以 $B = B_0 \cos \omega t$ 变化时,式中 B_0 和 ω 为常量,试求:

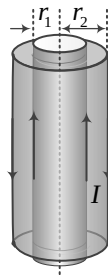
(1) 圆盘内涡电流的电流密度;

(2) 若 $R = 0.20 \text{ m}$ 、 $h = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、 $\rho = 6.0 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 、 $B_0 = 2.2 \text{ T}$ 、 $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 计算整个导体圆盘中涡电流的最大值。

14.22 如图所示,螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱形均匀磁介质,其横截面积分别为 S_1 和 S_2 ,磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 ,管长为 l ,匝数为 N ,且管长远大于螺线管的直径。试求螺线管的自感。



习题14.22的图



习例14.23的图

14.23 设同轴电缆由半径为 r_1 、 r_2 的两个同轴薄壁长直导体圆筒组成,电流由内筒流入,外筒流出,如图所示。两圆筒之间充以相对磁导率 $\mu_r = 1$ 的绝缘体。试求:同轴电缆单位长度上的自感。

14.24 一个空心螺线管,长为 $l = 0.50 \text{ m}$,横截面积为 $S = 10 \text{ cm}^2$,若螺线管上密绕 $N = 3000$ 匝线圈,试求:

(1) 螺线管的自感 L ;

(2) 若线圈中通有电流 $i = 10 \sin 100\pi t \text{ A}$,螺线管上的自感电动势 ε_L 。

14.25 如图所示,一面积为 2.0 cm^2 、共 50 匝小圆线圈 A 放在半径为 20 cm 、共 100 匝的大圆线圈 B 的中央,两圆线圈同心共面。试求:

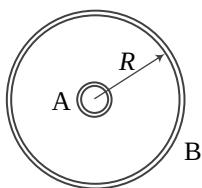
(1) 两线圈的互感;

(2) 当小线圈 A 中通有电流 $i = 10 \sin 100\pi t \text{ A}$,大线圈 B 中的互感电动势。

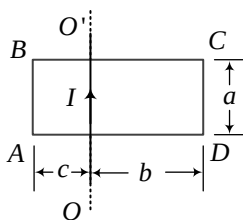
14.26 如图所示,长直载流导线 OO' 与矩形导线框 $ABCD$ 共面,其中 AB 边与直导线 OO' 平行,

在相交处两者互相绝缘。假设直导线中通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ ，且 $b/c = 2$ ，试求：

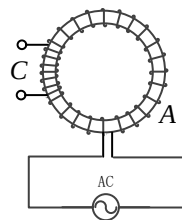
- (1) 长直导线与矩形导线框之间的互感系数；
- (2) 线框中的互感电动势。



习例14.25的图



习例14.26的图



习例14.27的图

14.27 如图所示，在截面为圆形的铁环上用漆包线均匀密绕了 $N_A = 200$ 匝的线圈 A，然后再在软铁环上绕一线圈 C，共 10 匝。假设铁环的平均半径为 $\bar{r}_A = 20 \text{ cm}$ ，软铁的相对磁导率为 $\mu_r = 1000$ ，铁环的横截面积为 $S = 0.50 \text{ cm}^2$ 。试估算：两线圈之间的互感系数（提示：细铁环内磁场可近似看成是均匀的）。

14.28 截面为矩形的密绕螺绕环线圈共有 N 匝，其尺寸如教材中图 14.29 所示，环内介质的相对磁导率为 μ_r 。试求：

- (1) 该螺绕环的自感；
- (2) 当螺绕环中通有电流 I 时，螺绕环中磁场的能量。

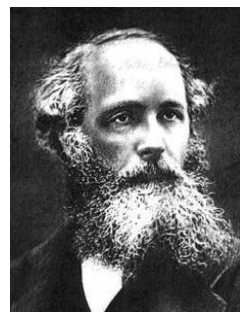
14.29 一个总匝数 $N = 250$ 、长 $l = 10 \text{ cm}$ 、直径 $d = 10 \text{ mm}$ 的载流密绕螺线管线圈（可视为长直螺线管），线圈中均匀充满了相对磁导率 $\mu_r = 500$ 的铁磁质。试求：当通有电流 $I = 2.0 \text{ A}$ 时，线圈中储存的磁场能量。

14.30 设同轴电缆由半径为 r_1 、 r_2 的两个同轴薄壁长直导体圆筒组成，电流由内筒流入，外筒流出，如习题 14.23 的图所示。两圆筒之间充以相对磁导率为 $\mu_r = 1$ 的绝缘体。试求：当电缆中通有电流 I 时，同轴电缆内单位长度上的磁场能量。

14.31 一根无限长载流直圆柱形导线，电流 I 沿导线的截面均匀分布。试证明：单位长度的导线内部所储存的磁场能量为： $\frac{\mu I^2}{16\pi}$ ，式中 μ 为导线的磁导率。

第十五章 电磁场与电磁波

在上一章中,我们已经知道,麦克斯韦为了解释产生感生电动势的原因,提出了**涡旋电场**的概念,即变化的磁场可以激发涡旋电场。随后麦克斯韦又大胆地提出了**位移电流**假设,指出变化的电场反过来也可以激发磁场。这样涡旋电场和位移电流完整地揭示了电场和磁场具有内在联系的两个侧面,表明电场和磁场是一个具有内在联系的统一体,麦克斯韦将它称为**电磁场**(electromagnetic field),并于 1864 年底归纳总结出了电磁场的基本方程组,称为**麦克斯韦方程组**。接着,麦克斯韦又提出了**电磁波**(electromagnetic wave)的概念,从理论上证明了电磁波只能是横波,其在真空中的传播速度就等于光速,并由此断言,“光是媒质中起源于电磁现象的横波”,从而开创了光的电磁理论。



麦克斯韦

本章将首先学习麦克斯韦提出的位移电流概念,以及全电流安培环路定律。然后介绍麦克斯韦归纳总结出的关于电磁场运动的基本方程组——麦克斯韦方程组,最后讨论电磁波的产生、传播及其基本性质。

§ 15.1 位移电流 全电流安培环路定律

15.1.1 位移电流

在磁场与介质的相互作用一章中,我们讨论了稳恒磁场的安培环路定理:磁场强度对于任意闭合回路的环流等于此回路所包围的(也就是穿过以此回路为周界的任意一个曲面的)传导电流的代数和,即

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum_i I_i \quad (15.1)$$

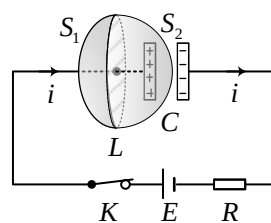


图15.1 电容器的充电过程

在稳恒电流条件下,式(15.1)总是成立的。现在要问:在非稳恒条件下,这个定律是否仍然成立呢?下面我们以平行板电容器的充电过程作为典型例子来讨论这一情况。

如图 15.1 所示,电容器在充电过程中,电路中的电流 i 不是恒定的,而是随时间变化的。由于传导电流 i 只能在导线上流动,并中断于电容器的两个极板上,因此,在电容器的两个极板之间无传导电流。假定曲面 S_1 、 S_2 具有公共周界 L , 其中 S_1 与导线相交,

S_2 在两极板之间，则曲面 S_1 上有传导电流 i 穿过，但曲面 S_2 上无传导电流。由稳恒磁场的安培环路定理，对于同一个闭合回路 L ，对曲面 S_1 来说，有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = i$$

对曲面 S_2 来说，有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

显然上述两个结果是互相矛盾的。这是因为空间的磁场分布是唯一的，因此磁场强度 $\mathbf{H}$ 对闭合回路 L 的环流也一定具有唯一确定的值。这只能说明稳恒磁场的安培环路定理不适用于非稳恒电流的情况，必须寻求新的规律。

在科学的发展史上，解决这类矛盾的方法有两种途径。一种是提出新的概念，建立一套与实验事实相符合的新的理论来代替原来的理论。例如在解决高速运动物体的力学问题时，爱因斯坦用相对论力学替代了牛顿的经典力学；另一种方法是在原来理论的基础上通过合理的假设与推广，使之既适用于原来的情况，又能适用于新的实验事实。麦克斯韦采用的是后一种方法。

在上述充电过程中，我们不难发现，通过曲面 S_1 的电量都堆积在电容器的极板上，即 dt 时间内通过 S_1 的电量 dq 等于极板上电量的增量。假设极板的面积为 S ，在充电过程的某一时刻，极板上的电量为 q ，同时忽略电容器中电场的边缘效应，则由电场的高斯定理，可得两极板间电位移矢量的大小为

$$D = \sigma = q/S \quad (15.1a)$$

其方向与电流的方向相同。式中 σ 是电容器极板上的面电荷密度。于是，通过曲面 S_2 的电位移矢量的通量为

$$\Phi_D = \iint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot S = q \quad (15.1b)$$

由式(15.1a)和式(15.1b)两式可得

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot S \quad (15.2a)$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \quad (15.2b)$$

此外，在电容器的极板上（导体内部）的传导电流可以看作是均匀分布的，如图 15.2

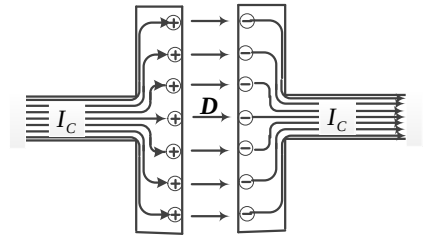


图15.2 电容器极板上的传导电流

所示。于是，在电容器极板上的传导电流和传导电流面密度分别为

$$I_c = \frac{dq}{dt} \quad (15.3a)$$

$$j_c = \frac{I_c}{S} = \frac{dq}{dt \cdot S} = \frac{d\sigma}{dt} \quad (15.3b)$$

比较式 (15.2) 和式 (15.3) 可以看出，在两极板之间被中断的传导电流和传导电流密度，在数值上分别等于两极板之间电位移矢量的通量对时间的变化率 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 和电位移矢量对时间的变化率 $\frac{dD}{dt}$ 。

因此，可以设想，如果将 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 和 $\frac{dD}{dt}$ 想象为某种电流和电流密度，那么就可以代替在两极板之间被中断了的传导电流和传导电流密度。

为此，麦克斯韦在 1861 年的一篇论文《论物理力线》中提出了位移电流概念。他把电位移矢量的通量对时间的变化率称为**位移电流** (displacement current)，用 I_D 表示；把电位移矢量对时间的变化率称为**位移电流密度** (displacement current density)，用 j_D 表示。于是，位移电流密度和位移电流的定义式分别为

位移电流密度
$$j_D = \frac{dD}{dt} \quad (15.4a)$$

位移电流
$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.4b)$$

不难看出，位移电流和传导电流不仅在大小上是完全相同的，而且在方向上两者也完全相同。由图 15.2 可知，在电容器充电时，传导电流和传导电流密度的方向从左向右。此时极板上的电荷 q 在增加，极板间的电位移矢量 $\mathbf{D}$ 的方向也从左到右，大小也在增加，所以极板间的位移电流的方向与导线上传导电流方向一致。同理可得，电容器放电时，它们的方向也相同。所以当引入位移电流以后，在电容器极板表面中断的传导电流在大小和方向上都被极板间的位移电流所接替，两者一起构成了电流的连续性。

15.1.2 全电流安培环路定理

麦克斯韦认为：在非恒定电流的电路中，存在着两种电流，一种是由电荷的定向移动形成的传导电流，另一种是由电位移通量的变化引起的位移电流，两种电流的总和称为**全电流**，并用 I_s 表示，即

$$I_S = I_C + I_D = \iint_S \mathbf{j}_C \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.5)$$

在非恒定电流情况下，电路中的传导电流虽然不连续，但是全电流总是连续的。

在考虑了全电流概念以后，麦克斯韦将磁场的安培环路定律应推广为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_S = I_C + I_D = \iint_S \mathbf{j}_C \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.6)$$

式(15.6)称为**全电流安培环路定理**。该定理表明，磁场强度对于任意闭合回路的环流等于该闭合回路所包围的（也就是穿过以该回路为周界的任意曲面的）全电流。式(15.6)中的 $\mathbf{H}$ 是空间所有电流（闭合回路内、外的所有传导电流和位移电流）所共同产生的。该定理的意义在于指出了传导电流和位移电流都会激发涡旋磁场，并且以完全相同的方式激发磁场。由于位移电流本质上就是变化的电场，因此麦克斯韦关于**位移电流假设的本质是认为变化的电场也能激发涡旋磁场**。

不难看出，利用全电流的观点，本节开头所提出的矛盾便可以迎刃而解了。在曲面 S_1 上只有传导电流，所以

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_C + 0 = I_C$$

在曲面 S_2 上，只有位移电流

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0 + I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = I_C$$

两种结果完全一致。

应当注意：传导电流和位移电流尽管在激发涡旋磁场的规律上是相同的，但它们是两个完全不同的概念。

首先，传导电流是由导体中电荷的定向漂移运动产生的，它在导体中流动时会产生焦耳热；而位移电流是由变化的电场激发的。根据电位移矢量的定义式 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，位移电流通常有两部分组成，即

$$I_D = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中第一项 $\iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 本质上是变化的电场，是位移电流的主要部分，与电荷的运动

无关；第二项 $\iint_S \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 只有在有电介质时存在，它是由变化的电场引起电介质极化程度

的变化所产生的极化电流。电介质在交变电场中被反复极化时也会产生热量（这是微波炉加热的工作原理），与焦耳热的发热规律完全不同。

其次，传导电流只能在导体中传播；而位移电流既可以沿导体传播，也可以脱离导体在真空中或介质中传播。即凡是有电场的地方，当电场发生变化时，就一定有位移电流。

例 15.1 如图所示，一半径为 R 的圆形平行板电容器，内部均匀充满了相对电容率为 ε_r 的电介质。在充电过程中的某一时刻，极板内电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} > 0$ 。假设极板内的场强均匀分布，且不计电场的边缘效应。试求：

（1）线路中充电电流的大小；

（2）两极板间离中心轴线距离为 r 的 P 点处的磁场强度的大小和方向。

解：（1）由 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ 得

$$\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

极板间总位移电流的大小为

$$I_D = \mathbf{j}_D \cdot \pi R^2 = \pi R^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{dE}{dt}$$

由全电流的连续性，可得电路中的充电电流的大小为

$$I_C = I_D = \pi R^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{dE}{dt}$$

（2）在两极板之间，以轴线为圆心，取一个半径为 r 的圆周为闭合回路 L ，如图 15.3 所示。由于磁场的分布具有轴对称性，所以在圆周 L 上，各点的磁场强度的大小都相等，方向与电流成右手螺旋关系。由全电流安培环路定理得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H \cdot 2\pi r = I_D = \pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{dE}{dt}$$

所以磁场强度的大小为

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r r \frac{dE}{dt}$$

其方向为圆周上 P 点的切线方向，而且与 I_D 成右手螺旋关系。

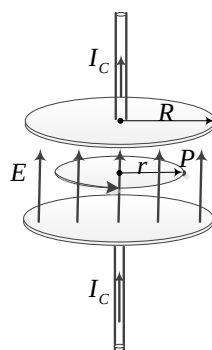


图15.3 例15.1图

§ 15.2 麦克斯韦方程组

15.2.1 麦克斯韦方程组的积分形式

麦克斯韦在提出感生电场和位移电流概念以后，对静电场和稳恒电流的磁场所遵守的基本规律（高斯定理和环路定理）进行了修正和推广，使之适用于电磁场，从而导出了关于电磁场的基本方程组——**麦克斯韦方程组**。

对于电场，麦克斯韦认为，在一般情况下，空间的总电场强度 $\mathbf{E}$ 是静电场 $\mathbf{E}_{\text{静}}$ 和感生电场 $\mathbf{E}_{\text{感}}$ 的矢量和，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{感}}$$

同理，总电位移矢量 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{静}} + \mathbf{D}_{\text{感}}$$

由于静电场是有源、无旋的，感生电场是无源、有旋的。所以总电场强度 $\mathbf{E}$ 对任意闭合回路 L 的环流为

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= \oint_L (\mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{感}}) \cdot d\mathbf{L} \\ &= \oint_L \mathbf{E}_{\text{静}} \cdot d\mathbf{L} + \oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{L} = 0 + \left(-\frac{d\Phi_m}{dt} \right) = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

即

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.7)$$

总电位移矢量 $\mathbf{D}$ 对任意闭合曲面的通量为

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{D}_{\text{静}} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_S \mathbf{D}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{S} = \sum q + 0 = \iiint_V \rho \, dV$$

即

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho \, dV \quad (15.8)$$

式中的积分体积 V 是闭合曲面 S 所围的体积。

对于磁场，麦克斯韦同样认为，在一般情况下，空间的磁场是由稳恒电流和位移电流共同产生的，磁场的环路定理应服从全电流安培环路定理，即

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{j}_C \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.9)$$

由于稳恒电流和位移电流的磁场都是无源的涡旋场，所以，磁场的高斯定理的形式不变，即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (15.10)$$

由方程式 (15.7)、式 (15.8)、式 (15.9)、式 (15.10) 所构成的方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho \, dV \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{j}_C \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right.$$

就是著名的**麦克斯韦方程组的积分形式**。麦克斯韦方程组高度概括了电场和磁场的基本性质和普遍规律，并把电场和磁场作为一个整体——**电磁场**，用统一的观点阐述了电场和磁场之间的联系，指出了变化的电场可以激发磁场，反过来变化的磁场也可以产生电场。麦克斯韦方程组是对电磁场的基本规律所作的完美的总结性的描述。麦克斯韦电磁理论的建立是十九世纪物理学发展史上的一个重要里程碑。正如爱因斯坦所说“这是自牛顿以来，物理学所经历的最深刻和最富有成果的工作。”

*15.2.2 麦克斯韦方程组的微分形式

利用矢量分析中的高斯公式和斯托克斯公式，可以将麦克斯韦方程组的积分形式变换为微分形式。

设矢量场： $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ ，则相应的高斯公式为

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div} \mathbf{A} \, dV$$

式中： $\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ 称为矢量场 $\mathbf{A}$ 的**散度**。把高斯公式分别用于式 (15.8)、

式 (15.10)，有

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV$$

$$\oint\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0$$

由此，得

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (15.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (15.12)$$

矢量分析中的斯托克斯公式为

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

式中： $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ ，称为矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度。把斯托克斯公式应用于式 (15.7)

和式 (15.9)，有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}_C \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

由此，得

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (15.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_C + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (15.14)$$

由式 (15.11)、式 (15.12)、式 (15.13)、式 (15.14) 四式组成的方程组称为**麦克斯韦方程组的微分形式**。麦克斯韦方程组的微分形式在电磁场理论研究及工程技术中均具有广泛的应用。1865 年，麦克斯韦正是从这个方程组出发，直接导出了电场和磁场的波动方程，从而预言了电磁波的存在，并且以横波形式在空间传播。麦克斯韦还从理论上算出了电磁波在真空中的传播速度就等于光的传播速度，并进一步预言光也是一种电磁波，从而揭示了光现象与电磁现象之间的联系。

§ 15.3 电磁波

15.3.1 LC 电磁振荡

麦克斯韦电磁场理论最主要的成就就是预言了电磁波的存在，并且以横波形式在空间传播。“涡旋电场”假设的实质是变化的磁场可以激发电场，“位移电流”假设的实质是变化的电场可以激发磁场。于是，变化的电场和磁场互相激发，以波动的形式在空间传播，从而形成电磁波。麦克斯韦预言电磁波的存在完全是他从理论上推出来的，直到 20 多年后的 1888 年，才由德国物理学家赫兹从实验上证实了电磁波的存在。

要产生电磁波，必须要有波源。下面，我们先介绍由一个电容 C 和一个自感线圈 L 组成的 LC 振荡电路，如图 15.4 所示。首先由电源对电容 C 充电，使电容器两极板上带等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ ，此时电容器两端电压 U 等于电源电动势 $\mathcal{E}$ 。然后使用换向开关，使电容器 C 与自感线圈 L 串联。在电容器放电前的瞬间，自感线圈中没有电流，电路中的电磁能量就是电容器内部两极板之间电场的能量。如图 15.5 (a) 所示。

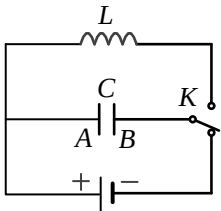


图 15.4 LC 振荡电路

电容器开始放电时，由电磁感应定律可知，电路中的电流逐渐增大，电容器极板上的电荷逐渐减少。电容器放电结束时，极板上的电荷变为零，电路中的电流达到最大值，同时自感线圈中的磁感强度达到最大值，如图 15.5 (b) 所示。如果不计电路的焦耳损耗和辐射损耗，则电容器中的电场能量将全部转化为线圈中的磁场能量。

此后，电路中的电流逐渐减小，并开始对电容器反向充电。当电流减为零时，反向充电结束，电容器内部的电场强度达到最大，线圈中的磁场能量反过来转化为电容器中的电场能量。如图 15.5 (c) 所示。

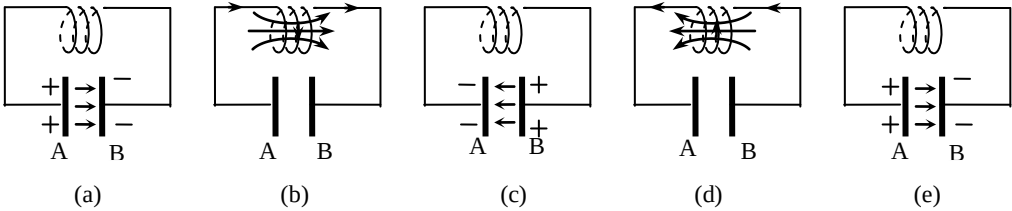


图 15.5 LC 振荡电路中的电磁振荡过程

然后，电容器又通过线圈进行放电，电流逐渐增大。不过，电路中电流的方向与图 15.5 (b) 中的方向相反，如图 15.5 (d) 所示。电场能量又逐渐被转换成磁场能量。

接着，电容器又被反向充电，磁场能量再一次被转换成电场能量，如图 15.5 (e) 所示。从而完成了一个完整的电磁振荡过程。只要回路中的焦耳热损耗和电磁辐射损耗可以忽略不计，这种电磁振荡将一直维持下去。可以证明，无阻尼 LC 振荡电路的固有振荡频

率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (15.15)$$

15.3.2 电磁波的产生与传播

虽然, LC 振荡回路可以产生电磁振荡, 但还不能作为一个有效的发射电磁波的波源。其中一个主要原因是电场和磁场主要集中在电容器内部和线圈内部, 无法向外部辐射; 另一个原因是, 电磁波的辐射功率与频率的 4 次方成正比, 而在一般的振荡电路中, 因 L 和 C 的数值较大, 由式 15.15 得到的固有振荡频率较低, 所以辐射功率很低, 几乎可以忽略不计。要将 LC 振荡回路中的电磁能量有效地发射出去, 必须要满足两个条件: ①频率要高, ②电路要开放。显然, 要提高频率, 就要尽量减小线圈的自感 L 和电容器的电容 C ; 而电路开放就是要尽量让电磁能量向空间散发出去。

根据这样的设想, 我们可以通过对 LC 振荡回路作适当的改造, 来实现电磁波的发射。由螺线管线圈的自感系数公式 $L = \mu_0 n^2 V$, 可知: 可以通过减少线圈的匝数来减小 L ; 由平行板电容器的电容公式 $C = \varepsilon_0 S/d$, 可知: 可以通过减小两极板的面积 S , 并增加极板间的距离 d 来减小 C 。由此看来, 其理想的极限情况就是将 LC 振荡回路拉成一根直导线, 如图 15.6 (c) 所示, 这就是我们所熟知的发射天线。电视发射塔顶部那根长长的“直圆柱体”、无线通讯基站上一根根直立的“金属杆”等等, 都属于这类发射天线。当高频交变电流在天线内往复振荡时, 在天线的两端就会出现正负交替的等量的异号电荷, 形成所谓的“振荡电偶极子”。虽然这些实际天线比振荡电偶极子模型复杂的多, 但基本的辐射原理是相同的。

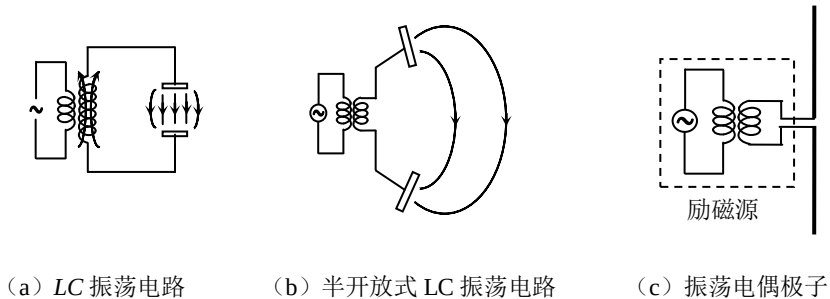


图 15.6 由 LC 振荡电路向振荡电偶极子的转变

下面, 我们以振荡电偶极子模型来简述电磁波的辐射规律。我们将电矩随时间作迅

速周期性变化的电偶极子称为振荡电偶极子。最简单的振荡电偶极子模型是电矩随时间按余弦或正弦规律进行变化，即

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$$

式中： $\mathbf{p}_0$ 是电偶极子电矩的振幅（电矩的最大值）， ω 是振荡圆频率。

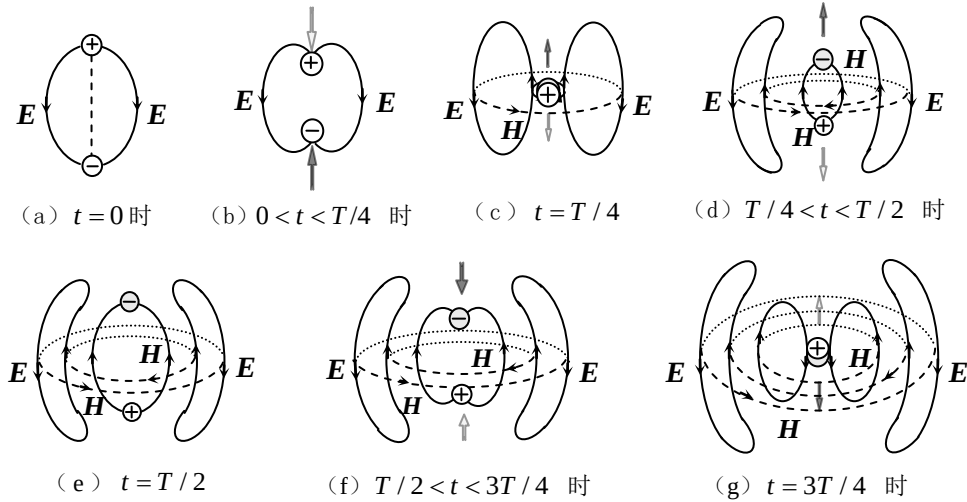


图 15.7 振荡电偶极子附近电场线的变化

由于振荡电偶极子中的正负电荷在不断地运动，所以电场线也随时间而变化，并以有限的速度在空间传播。在电偶极子中心附近的近场区域内，即离偶极子中心的距离 r 远小于波长的区域内，电场线的瞬时分布与静态电偶极子的电场线相近；但在距离偶极子中心较远的区域内，电场强度 $\mathbf{E}$ 的量值不与同一时刻的电荷位置相对应，而是与较前某一时刻的电荷位置相对应。现参考图 15.7，作示意说明如下：当 $t=0$ 时，正负电荷中心相距 l ，其中一对电场线如图 15.7 (a) 所示；当两电荷逐渐靠近时，电场线也发生变化，如图 15.7 (b) 所示；当 $t=T/4$ 时，两电荷重合，一根闭合的电场线便形成了，如图 15.7 (c) 所示；然后该闭合的电场线脱离电荷，并向外扩张，同时随着电荷的运动，产生了新的电场线，如图 15.7 (d) — (g)。当然在产生变化的涡旋电场的同时，还将激发出闭合的涡旋磁场，其磁感线是以电偶极子的轴线为中心、并与轴线垂直的同心圆环如图中的虚线所示。随着时间的推移，电场线和磁场线便以横波的形式向外扩张，由近及远地传播出去。在远离振荡电偶极子的地方，即在 $r \gg \lambda$ 的波场区，波阵面趋于球形，如图 15.8 所示。

若以振荡电偶极子的中心为坐标原点，以振子轴线为极轴的球坐标来描述电磁场，通过求解麦克斯韦方程组可以得到（过程略），在 $r \gg \lambda$ 的波场中任意一点 P 处的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 的数值分别为：

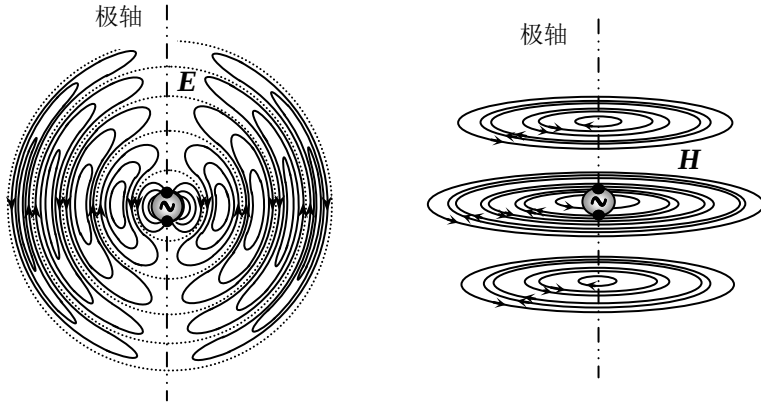


图 15.8 振荡电偶极子周围的电磁场

$$E(r, t) = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi \epsilon u^2 r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (15.16)$$

$$H(r, t) = \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi u r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) \quad (15.17)$$

式中： ω 为振荡电偶极子的圆频率， p_0 为振荡电偶极子电矩的振幅， r 为从振荡电偶极子中心到 P 点的位矢 $\mathbf{r}$ 的大小， θ 为位矢 $\mathbf{r}$ 与极轴的夹角， u 为电磁波的传播速度。
 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 、 $\mu = \mu_0 \mu_r$ ，为介质的绝对电容率和绝对磁导率。

可以证明，电磁波的传播速度为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (15.18)$$

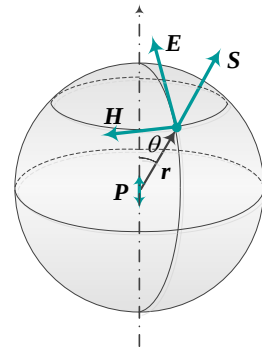


图15.9 在波场区中， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{r}$ 互相垂直

此外，在波场中的任一点 P 处， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向与波的传播方向互相垂直，并成右手螺旋关系，如图 15.9 所示。

在距离振荡电偶极子足够远的（ r 很大）的一个小范围内， θ 及 r 的变化很小，可以视为常量。这时电场强度和磁场强度的振幅 E_0 和 H_0 也可视为常量。于是式（15.16）和式（15.17）可以写成：

$$E(r,t) = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \quad (15.19)$$

$$H(r,t) = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{u} \right) = H_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \quad (15.20)$$

上两式通常称为平面电磁波的波函数（或波动表达式）。这说明在离振荡电偶极子很远的地方，电磁波可以视为平面电磁波。

15.3.3 电磁波的主要性质

根据以上讨论，电磁波的主要性质归纳如下：

1、电磁波是横波。波场中任意一点处的电场强度 $\mathbf{E}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 都与波的传播方向 $\mathbf{r}$ 垂直，并且 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{r}$ 三者成右手螺旋关系，即 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向就是 $\mathbf{r}$ 的方向，如图 15.9 或图 15.10 所示。

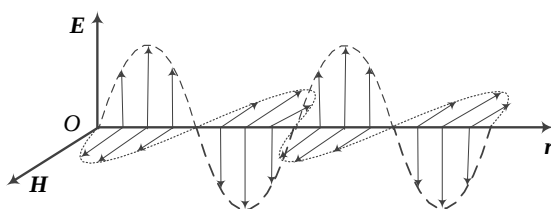


图15.5 平面电磁波的传播示意图

2、 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 同相位，且数值大小成比例。 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 的相位相同，这一点可以从式 (15.16)、和式 (15.17) 中明显看出。将式 (15.16) 与式 (15.17) 相除，并注意到 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ，

可得

$$\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H \quad (15.21)$$

3、电磁波在真空中的传播速度与真空中的光速相等。由式 (15.18) 可知，电磁波在真空中的传播速度为

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \times 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个数值与真空中的光速 c 完全相等。麦克斯韦正是由此预言，光就是一种电磁波。从而为光的电磁理论奠定了理论基础。

以上结论虽然是从振荡电偶极子激发的电磁波中得到的，但具有普遍性，适用于所

有的电磁波。

15.3.4 电磁波的能量和动量

1. 电磁波的能量密度

电磁波是变化的电场和变化的磁场在空间的传播过程。由于电场和磁场都具有能量，因此电磁波是具有能量的，电磁波的传播必然伴随着能量的传播。这种以波的形式传播出去的能量称为辐射能，能量的辐射方向就是电磁波的传播方向。

在电场和磁场中已经得到电场和磁场的能量密度分别为：

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

由此可得，电磁波的能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

再利用式（15.21）得：

$$w = \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon \mu} EH = \frac{EH}{u} \quad (15.22)$$

由于 E 和 H 都是时间和空间的周期函数，所以电磁场的能量密度 w 也是时间和空间的周期函数。对于真空中的平面电磁波，由式（15.19）和（15.20）可得：

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

由此不难得到，电磁波的平均能量密度为：

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0 H_0}{u} \quad (15.23)$$

2. 电磁波的强度

电磁波在单位时间内通过与波的传播方向垂直的单位截面内的电磁波的能量称为**电磁波的能量流密度**，并用符号 S 表示。如图 15.11 所示，设电磁波沿 r 方向传播， dA 是垂直于传播方向上的某一截面。若电磁波的能量密度为 w ，则 dt 时间内通过该截面的电磁波的能量为 $w \cdot udt \cdot dA$ ，所以电磁波的能量流密度为

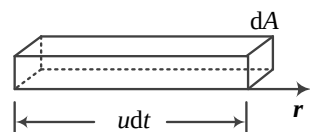


图15.11 电磁波的能量流密度

$$S = \frac{w \cdot u dt \cdot dA}{dA} = w \cdot u = EH \quad (15.24)$$

考虑到能量的辐射方向与电磁波的传播方向一致，即与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相同，又 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ，所以上式可以用矢量形式表示，即

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (15.25)$$

式中矢量 $\mathbf{S}$ 称为**能流密度矢量**，又称为**坡印廷矢量**。

不难看出， $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 三者的方向成右手螺旋关系，如图 15.12 所示。

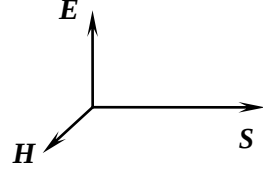


图 15.12 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 的方向

把式 (15.19) 和 (15.20) 代入式 (15.24) 得

$$S = E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right)$$

上式表明：平面电磁波的能流密度矢量（即坡印廷矢量）的大小是时间 t 和距离 r 的周期函数。能流密度的大小对时间的平均值称为**电磁波的强度**，即

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} u \varepsilon E_0^2 \quad (15.26)$$

在波动光学中，我们把电磁波的强度称为光强，并用符号 I 表示，即

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} u \varepsilon E_0^2 \quad (15.27)$$

式中 u 为电磁波的传播速度， ε 是介质的电容率，在真空中， $u = c$ ， $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。上式表明：在电磁波或光波中，波的强度与该点电场强度振幅的平方成正比。

3. 电磁波的动量

电磁波不仅具有能量，而且还具有动量。根据相对论的能量与动量关系，在真空中单位体积内电磁波的动量为

$$P = \frac{w}{c} = \frac{EH}{c^2} \quad (15.28)$$

动量的方向就是电磁波的传播方向，即与 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相同，所以单位体积内电磁波动量的矢量表达式为

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (15.29)$$

我们知道，能量和动量是物质运动的量度。所以电磁场是物质的一种存在形式，它与实物粒子一样，都是客观存在的。

15.3.5 电磁波谱

实验表明，电磁波的波长范围很广，波长没有上下限的限制，从无线电波、红外线、可见光、紫外线到 X 射线和 γ 射线等都是电磁波。它们的本质完全相同，只是波长（或频率）有很大的差异。由于波长不同，它们就有不同的特性，而且产生的方式也各不相同。为了便于比较，人们按照它们的波长（或频率）大小依次排列，叫做电磁波谱，如图 15.13。

在电磁波谱中，波长最长的是无线电波（其波长范围从几毫米到几千公里），波长从长到短可分为长波、中波、短波、超短波和微波。通常无线电波由振荡电路产生。长波在介质中传播时损耗很小，常用于远距离通讯和导航；中波多用于航海和航空定向及无线广播；短波多用于无线广播、无线通讯等；超短波、微波多用于电视、雷达、导航及其它特殊用途。

可见光的波长范围在 400 nm ~760 nm 之间，不同的波长对应于不同的颜色，其波长与颜色的对应关系如图 15.14 所示。

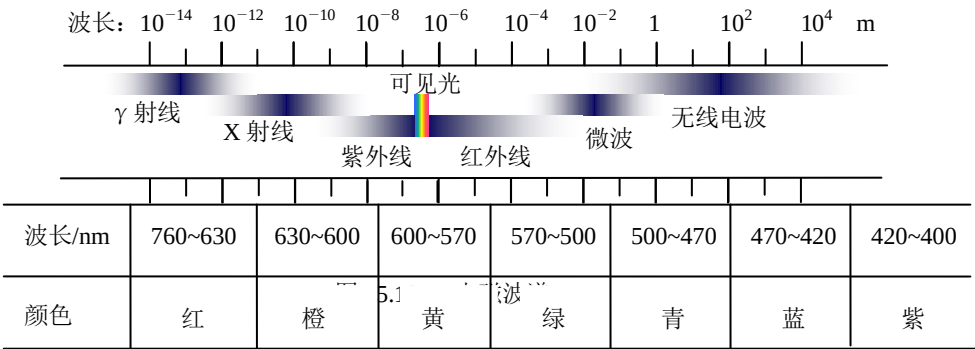


图 15.14 颜色与波长的对应关系

波长在 760nm 到 1mm 之间的电磁波，不能引起人的视觉，由于它处于可见红光的外侧，所以称为红外线。根据波长的大小，红外线又可以分为近红外、中红外、远红外等。近红外线，波长为 0.75~1.50 μ m 之间；中红外线，波长为 1.50~6.0 μ m 之间；远红外线，波长为 6.0~1000 μ m 之间。红外线的应用非常广泛，在军事上通过红外成像和红外摄影制作的夜视仪进行夜间观测，在人造卫星上用红外遥感进行资源勘探和军事监测，在工

农业生产上用红外线的热效应来烘烤物体。随着红外发光技术和探测技术的不断改进，红外线技术在光通讯（红外遥控、PC 数据通讯）、自动控制与安全防盗、医学检查和治疗等领域的应用越来越广泛。

波长在 10nm 到 400nm 之间的电磁波叫做紫外线。它能引起化学反应、生物效应和荧光效应。根据生物效应的不同，将紫外线按照波长划分为四个部分：A波段(400~315nm)，又称为黑斑效应紫外线；B波段(315~280nm)，又称为红斑效应紫外线；C波段(280~200nm)，又称为灭菌紫外线；D波段(200~5nm)，又称为真空紫外线。医学上常用C波段紫外线来消毒、杀菌；在金融和商业领域，常利用紫外线的荧光效应制作防伪标记。

红外线、可见光和紫外线这三部分电磁波统称为光辐射，它们都是由炽热的物体、气体放电以及其它光源中原子或分子的外层电子发生能级跃迁时所产生的。

X射线（亦称伦琴射线），波长范围在 5nm 到 0.004nm 之间。它是由高速运动的电子被急剧减速时（如快速电子射到金属靶时）或原子的内层电子发生能级跃迁时产生的。它的能量很大，具有很强的穿透能力，也能使底片感光。是无损探伤、透视人体内部病变以及分析物质（晶体）结构的有力工具。

波长比 X射线更短的是 γ 射线，它是原子核内部状态发生变化时产生的电磁辐射。许多放射性同位素都会发射 γ 射线。 γ 射线的能量比 X射线还要大，穿透能力也更强。可用于工业无损检测，进行放射性实验，产生高能粒子，还可借助它研究天体、认识宇宙。

需要指出的是，电磁波谱图中各波段主要是按照产生方式或探测方法的不同来划分的，随着科学技术的发展，用各种不同的方式产生的电磁波会有一些共同的波段，从而会出现不同波段互相重叠的情况。

思考题

15.1 什么是位移电流？它与传导电流有何区别？

15.2 关于位移电流的概念，下列说法正确的是（ ）。

- A. 位移电流就是变化的电场，它在数值上等于电场强度对时间的变化率。
- B. 位移电流只能在非导体中传播。
- C. 位移电流是一种假设，实际上并不存在。
- D. 位移电流由变化的电场产生，其大小等于电位移通量对时间的变化率。

15.3 微波炉的加热原理是什么？

15.4 简述全电流安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \sum I_i + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

中各项的物理意义，并说明这个方程所揭示的物理意义。

15.5 在对某电容器充电时，测得某一时刻的充电电流为 0.5A ，则电容器两极板之间的位移电流为多少？在充电电路切断后，电容器极板间的位移电流还有吗？

15.6 在 LC 电磁振荡电路中，电场能量和磁场能量是怎样交替转换的？

15.7 普通的 LC 振荡电路为什么不能有效地发射电磁波？要有效地发射电磁波，应如何改造 LC 振荡电路？

15.8 电磁波的主要性质有哪些？

15.9 什么是坡印廷矢量？

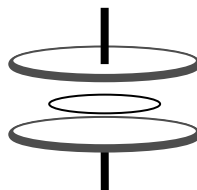
15.10 在电磁波谱上，从无线电波到 γ 射线，各波段的电磁波是怎样产生（发射）的？

习 题

文档 15.2 第 15 章 习题答案

15.11 试证明平行板电容器充电时，极板间的位移电流 $I_D = C \frac{dU}{dt}$ ，式中 C 为平行板电容器的电容， U 为两极板间的电压。

15.12 一个圆形平行板电容器，如右图所示，极板的半径 10 mm ，两极板间夹着一层相对电容率为 4.0 、厚为 0.50 mm 的均匀电介质，两极板上加一正弦电压 $U = 1.0 \times 10^3 \sin(2\pi \times 10^6 t)\text{ V}$ 。试求：



习题 15.12 的图

(1) 两极板间位移电流密度及位移电流的最大值；

(2) 极板内离极板中心 5.0 mm 处磁感应强度的最大值。

15.13 给一个极板面积为 S ，电容为 C 的平行板电容器充电，充电电流为 $i = I_0 e^{-t/\tau}$ (SI)，式中 τ 为电路的时间常数。 $t = 0$ 时，极板上已有电荷 q_0 ，忽略电容器内电场的边缘效应，试求：

(1) 极板上电压 u 随时间 t 的变化关系；

(2) t 时刻两极板之间的位移电流密度 j_D 及两极板之间总的位移电流 I_D 。

15.14 真空中，一平面电磁波的电场强度的波动表达式由下式给出：

$$E_x = 0.60 \cos \left[2\pi \times 10^6 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}, \quad E_y = 0$$

试求：该电磁波的波长、频率、传播方向以及磁场强度的波动表达式。

15.15 已知真空中的平面电磁波沿 x 轴正向传播，电场沿 y 轴方向振动，电场强度的幅值为 $E_0 = 6.0 \times 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ，试求：

(1) 磁场强度的振动方向及振幅；

(2) 该平面电磁波的平均能量密度和强度。

15.16 一平面电磁波在介质中传播, 假设磁场强度的振幅 $H_0 = 2.90 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$, 介质的相对电容率 $\epsilon_r = 10.0$, 相对磁导率 $\mu_r = 100$, 试求:

(1) 电磁波在此介质中的传播速度;

(2) 电磁波的强度。

15.17 一广播电台的辐射功率是 10KW, 假定辐射场均匀地分布在以电台为中心的半曲面上, 试求:

(1) 距离电台 10Km 处, 该电磁波的强度;

(2) 距离电台 10Km 处, 电磁波中电场强度和磁场强度的振幅。

15.18 一气体激光器发出的光强可达 $3.0 \times 10^{18} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。试计算该激光束中电场强度和磁场强度的振幅。

*15.19 振荡电偶极矩的振幅为 p_0 的偶极子天线, 其辐射的电磁波中的电场强度和磁场强度的振幅可以分别用式 (15.16)、(15.17) 表示。试证明:

(1) 该电磁波在 (r, θ, φ) 出的强度为

$$\bar{S} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 r^2 u}$$

式中: u 是电磁波的传播速度;

(2) 振荡电偶极子的平均辐射 (总) 功率为:

$$\bar{P} = \frac{\mu p_0^2 \omega^4}{12\pi u}$$

此式也称为辐射功率的拉莫尔 (Larmor) 公式。[提示: 球坐标系中的面积元公式为 $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$,

则通过此面元的平均辐射功率为: $d\bar{P} = \bar{S} \cdot dA$]

第 16 章 几何光学

课件下载
第 16 章 几何光学

人类主要通过光从外界获得信息，进而认识物质世界。通过对光的现象、光的传播规律、光的本性及其与物质的相互作用的研究，人类已经建立了关于光的系统的、完整的学科——**光学 (optics)**，它是物理学重要组成部分。光学由几何光学、波动光学和量子光学和近代光学四个部分组成。几何光学不涉及光的物理本性，仅以光的直线传播为基础，研究光在透明介质中的传播规律和光学仪器的成像规律，它是设计光学仪器的主要依据；波动光学主要研究光的干涉、衍射和偏振等光的波动性质和规律；量子光学则是以量子理论为基础，将光视为一种能量子，研究光与物质相互作用的规律；现代光学是指 20 世纪 60 年代以来，随着激光的面世发展起来的光学研究及应用领域，如激光物理与技术、光学信息处理、光纤技术、非线性光学等。

本章介绍几何光学，首先简要介绍几何光学的基本规律和成像的基本概念，然后着重讨论单球面折射（成像）规律、透镜成像规律、有关眼睛的光学问题以及几种常用的光学仪器。

§ 16.1 几何光学的基本定律

几何光学 (geometric optics) 是以光的实验定律为基础，利用几何方法来研究光的传播规律和成像规律的学科。

16.1.1 几何光学的基本定律

人们通过大量的实验，总结出了几何光学中的三个基本定律。

1、光的直线传播规律

光在均匀介质中沿直线传播，这就是光的直线传播规律。

在几何光学中，通常用带箭头的直线来表示光的传播方向。这种有方向的直线称为**光线**。在均匀介质中，光源向各个方向发出的光可以用一束光线来表示。事实上，在光传播的空间，并不真的存在这种有方向的直线，它仅代表了光波中能量的传播方向。但

是人们可以通过光线概念，利用几何方法直观、方便地讨论光在透明介质中的传播规律和光学仪器的成像规律。

2、光的反射定律和反射定律

大量实验表明，当一束平行光射到两种均匀的、各向同性的透明介质的分界面上时，一部分光被反射回原来的介质，称为反射光；还有一部分光进入到另一种介质，称为折射光。反射光和折射光的方向取决于介质表面的平整度。如果界面粗糙不平，则向各个方向都有反射光，这种情况称为**漫反射**（diffuse reflection）；如果界面光滑平整，则反射光和折射光仍然是平行光，它们的传播方向将分别由反射定律和折射定律决定，如图 16.1 所示，这样的反射称为**镜面反射**（specular reflection）。

（1）反射定律

实验表明：入射光、反射光和界面法线在同一平面内；入射光和反射光分居法线的两侧；反射角等于入射角，即

$$i' = i \quad (16.1)$$

这称为光的**反射定律**（reflection law）。

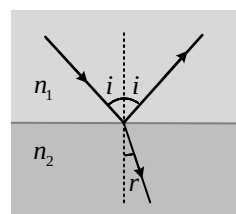


图 16.1 光线的反射和折射

（2）折射定律

实验表明：当光在两种各向同性的、均匀介质的界面上发生折射时，入射光、折射光和界面法线在同一平面内；折射光和入射光分居法线两侧；入射角 i 的正弦值与折射角 r 的正弦值之比与入射角无关，等于两种介质的折射率之比，即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (16.2)$$

这称为光的**折射定律**（refraction law）式（16.2）中 $n_{12} = n_2/n_1$ 是第二种介质相对于第一种介质的**折射率**，称为**相对折射率**， n_1 、 n_2 是这两种介质相对于真空的折射率，称为**绝对折射率**，简称折射率。

3. 光路可逆原理

当光线逆着原反射光（或折射光）方向入射时，所产生的反射光（或折射光）将逆着原入射光的方向传播，这一结论叫**光路可逆原理**。

16.1.2 全反射

当光线从光密介质射向光疏介质，即 $n_1 > n_2$ 时，由式(16.2)可以看出，折射角将大于入射角，当入射角大于某一临界值 i_c 时，折射光线消失，光线全部反射回原介质，如图 16.2 所示，这种现象称为**全反射**， i_c 称为**临界角**（critical angle）。当入射角等于 i_c 时，折射角等于 90° ，由式(16.2)可得

$$i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (16.3)$$

显然，介质的折射率越大，它相对于空气的临界角就越小，从而能够发生全反射的入射角的范围 ($90^\circ \sim i_c$) 就越大。例如，金刚石的折射率很大 ($n = 2.417$)，当光线进入金刚石后，在金刚石的各个内表面上很容易全反射，当光再从金刚石内射出时就会非常明亮。因此用白光照射时，金刚石就显得更加光彩夺目。

全反射的一个重要应用就是制作又称**纤维内窥镜**，简称**纤镜**（fiber scope）。如胃镜、肠镜、血管镜等都是纤维内窥镜。图 16.3 是一个内窥镜的实物照片。纤镜实际上是由大量纤维细丝组成的纤维束，这些纤维细丝都是由非常透明的材料（如玻璃）拉成的，每根纤维细丝的外表面均涂有一层折射率比纤维丝的折射率还小的物质，当光线以较大的入射角入射细丝时，光线在细丝的侧壁上就会发生全反射，使光线沿着纤维细丝向前传播而不向外泄露，如图 16.4 所示。

纤镜是一种重要的医用检查器械。组成纤镜的纤维束的两端必须严格排列一致并粘结牢固，但中间部分并不粘结，这样整个纤维束很柔软，可弯曲，并具有一定的机械强度，可以比较容易插入患者体内，使用时非常方便。通过将外界的强光导入人体器官内部，将人体器官的内壁照明，再通过

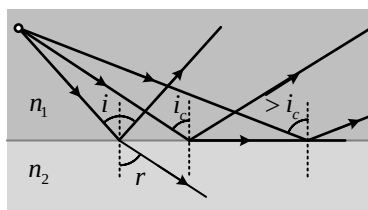


图 16.2 全反射现象



图 16.3 医用内窥镜

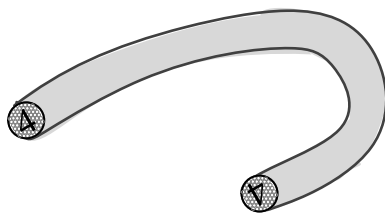


图 16.4 光学纤维成像示意

纤镜将器官内壁的彩色图像导出体外或显示在电脑屏幕上，医生就可以清楚地观察器官内壁的组织形态，由此来发现并诊断疾病。

§ 16.2 成像的基本概念

在几何光学中，大部分都涉及到成像问题，如使用照相机、显微镜等光学仪器，最终目标就是要得到一个清晰的像。因此先介绍有关成像的基本概念。

16.2.1 物的概念

在自然界中，有些物体能自身发光，称为发光体；有些物体虽然本身不能发光，但能够反射光，在几何光学中也被视为发光体。发光体相对于一个光学系统而言都称为物，由物体发出并射到光学系统的光线称为入射光线。任何物体都可以看成是由许多物点的组成的集合，所以几何光学中通常讨论光学系统对点物的成像规律。

由上所述可以给出点物的定义：对于一个光学系统来说，入射光线（或其延长线）的相交点就是点物的位置。

在实际情形中，若存在一个真实的发光点（点物），就称这个真实的发光点为**实物**（real object），如图 16.5(a)、(c) 所示。显然，从实物发出的入射光线一定是发散光束。

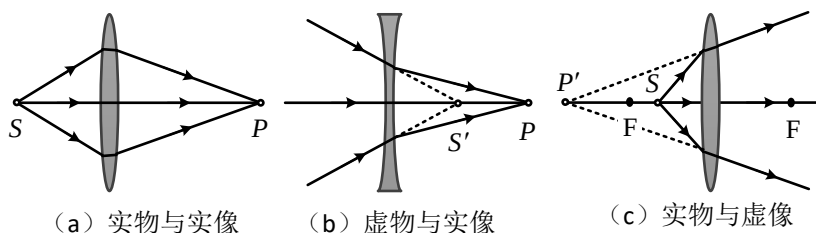


图 16.5 物与像

在图 16.5(b) 中，一束入射光线不经过光学系统时，它将会聚于 S' 点；而当它经过光学系统的反射(或折射)后，会聚于另一点 P 。根据定义，点 S' 就是这个光学系统的点物的位置。由于实际上在 S' 点并没有发光点，所以称这个点物叫**虚物**（virtual object）。所以虚物是入射光线延长线的交点。

如果入射光线是一束平行光，则认为是由无限远处的点物所发出。

16.2.2 像的概念

入射光线经过光学系统的反射或折射后，反射光或折射光也会相交于某一点，或者是它们的反向延长线相交于某一点，就称这个相交点叫**像点**（image point）。

如图 16.5（a）、（b）所示，若反射光或折射光相交于某一点 P ，则称为**实像**（real image），此种情形下，反射光或折射光是会聚光线；若反射光或折射光是发散的，它们不能相交，即不能形成一个实际的像点，于是将它们的反向延长线的交点称为**虚像**（virtual image），如图 16.5（c）中的点 P' ；如果反射光线（或折射光线）是一束平行光，则认为成像在无限远处。

对一个光学系统而言，物和像总是一一对应的，它们的这种关系叫共轭关系，物点和像点称为共轭点，入射光线和出射光线称为共轭光线。

§ 16.3 球面折射

16.3.1 单球面折射

当两种折射率不同的透明介质的分界面为球面的一部分时，光所产生的折射现象称为**球面折射**。单球面折射的成像规律是了解各种透镜以及眼睛等光学系统的理论基础。

如图 16.6 所示，有两种均匀透明介质，折射率分别为 n_1 和 n_2 （设 $n_1 < n_2$ ），MN 为球形折射面，其曲率中心为 C ，曲率半径为 r ，球面与主光轴的交点为折射面的顶点 P ，通过曲率中心 C 的直线 OPI 为折射球面的主光轴。

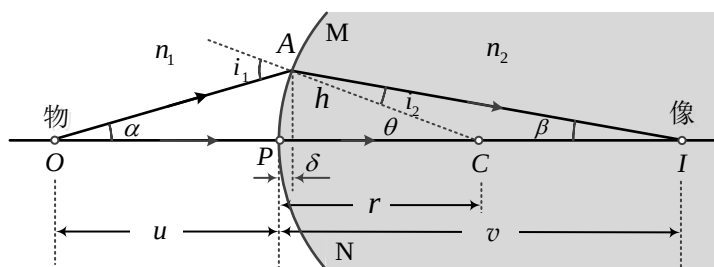


图 16.6 单球面折射

在图 16.6 中，如果光线 OA 与主光轴的夹角 α 满足 $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$ ，则此光线称为**近轴光线**（paraxial rays），下面的讨论内容都仅限于近轴光线。

假设主光轴上自 O 点发出的近轴光线经单球面折射后与主光轴交于 I 点，则 I 点是物点 O 的像。物点 O 到球面顶点 P 的距离 OP 称为物距，用 u 表示，像点 I 到 P 的距离 PI

称为像距，用 v 表示， u 与 v 的关系，可由折射定律 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ 和近轴条件推出。

由于 OA 是近轴光线，入射角 i_1 、折射角 i_2 都很小，因此， $\sin i_1 \approx i_1$ ， $\sin i_2 \approx i_2$ 。折射定律可简化为

$$n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2 \quad (16.4)$$

由图可知

$$i_1 = \alpha + \theta \quad i_2 = \theta - \beta$$

将 i_1 、 i_2 的表达式代入式 (16.4)，整理得

$$n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \beta = (n_2 - n_1) \theta \quad (16.5)$$

对于近轴光线， α 、 β 、 θ 均很小，满足

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{h}{u + \delta} \approx \frac{h}{u} \quad \beta \approx \tan \beta = \frac{h}{v - \delta} \approx \frac{h}{v} \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{h}{r - \delta} \approx \frac{h}{r}$$

将此代入式 (16.5)，并同除以 h ，则有

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (16.7)$$

式 (16.7) 称为**单球面折射公式**，它适用于一切凸、凹球面的成像计算。在应用此公式时物距 u 、像距 v 、曲率半径 r 须遵守如下符号规则：实物物距 u 和实像像距 v 均取正值；虚物物距 u 和虚像像距 v 均取负值；凸球面对入射光线时，球面的曲率半径 r 为正，反之为负。

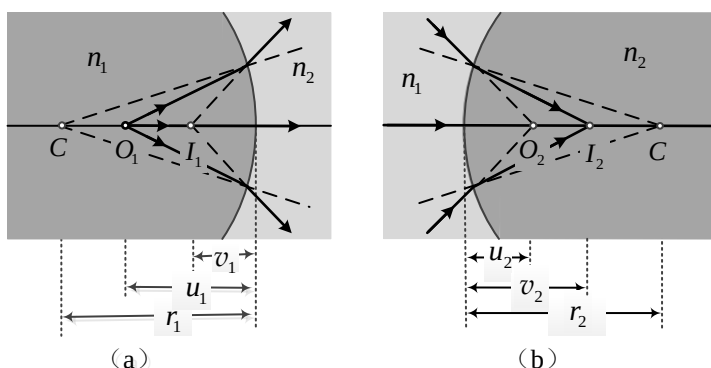


图 16.7 单球面折射中的物和像

在图 16.7 (a) 中， O_1 为实物（是发散的入射光束的顶点）， $u_1 > 0$ ； I_1 为虚像（发散的折射光束的顶点）， $v_1 < 0$ ， $r_1 < 0$ ；在图 16.7 (b) 中， O_2 为虚物（会聚的入射光束

的顶点), $u_2 < 0$; I_2 为实像 (会聚的折射光束的顶点), $v_2 > 0$, $r_2 > 0$ 。

对于给定的物距 u , 不同的折射球面 (n_1 、 n_2 、 r) 有不同的像距 v 与之对应, 因此可以用式 (16.7) 等号右边的 $(n_2 - n_1)/r$ 表示球面的折射本领, 称为折射球面的**光焦度** (dioptric strength), 用 Φ 表示, 即

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (16.8)$$

如果 r 以米 (m) 为单位, Φ 的单位为 (m^{-1}), 称为**屈光度** (diopter), 用 D 表示。例如 $n_2 = 1.5$ 、 $n_1 = 1.0$ 、 $r = 10\text{cm}$ 的单球面, 其焦度等于 5m^{-1} , 记为 $5D$ 。

当点光源位于主光轴上某一点 F_1 时, 若由该点发出的光线经单球面折射后成为平行于主光轴的平行光线, 即 $v = \infty$, 则点 F_1 称为该折射球面的**第一焦点**, 从第一焦点到折射球面顶点的距离称为**第一焦距**, 以 f_1 表示。将 $v = \infty$ 代入式 (16.2) 得

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r \quad (16.9)$$

如果平行于主光轴的近轴光线经单球面折射后成像于主轴上某一点 F_2 , 则点 F_2 称为折射球面的**第二焦点**, 从点 F_2 到折射球面顶点的距离称为**第二焦距**, 以 f_2 表示。将 $u = \infty$, 代入式 (16.7) 得

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \quad (16.10)$$

当 f_1 、 f_2 为正值时, F_1 、 F_2 是实焦点, 折射球面对光线有会聚作用; 当 f_1 、 f_2 为负值时, F_1 、 F_2 是虚焦点, 折射球面对光线有发散作用。

由式 (16.9) 和式 (16.10) 可知, 折射球面的两个焦距是不相等的, 其比值等于折射球面两侧介质的折射率之比, 即

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (16.11)$$

由式 (16.8) ~ (16.11) 可得折射球面的两个焦距与光焦度之间的关系为

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \quad (16.12)$$

可见，对同一折射球面，尽管其两侧的焦距不相等，但是同一侧的 n 与 f 的比值是相等的。

例 16.1 圆柱形玻璃棒（ $n=1.5$ ）的一端是半径为 2cm 的凸球面。（1）求玻璃棒置于空气中时，求在棒的轴线上距离棒端外 8cm 物点所成像的位置？（2）若将此玻璃棒放入水（ $n=1.33$ ）中时，物距不变，像距应是多少（假设玻璃棒足够长）？

解：（1）由单球面折射公式

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

由题意可知，当棒置于空气中时， $n_1=1.0$ ， $n_2=1.5$ ， $r=2\text{cm}$ ， $u=8\text{cm}$ ，将数据代入上式，可解得

$$v=12\text{cm}$$

即所成像在玻璃棒内轴线上离玻璃棒顶点 12cm 处，为实像。

（2）当玻璃棒放入水中时， $n_1=1.33$ ， $n_2=1.5$ ， $r=2\text{cm}$ ， $u=8\text{cm}$ ，将数据代入单球面折射公式，得

$$\frac{1.33}{8} + \frac{1.5}{v} = \frac{1.5 - 1.33}{2}$$

由此解得

$$v=-18.5\text{cm}$$

由于 $v < 0$ ，表明像点在玻璃棒的外侧、离玻璃棒顶点 18.5cm 处，为虚像。

16.3.2 共轴球面系统

如果两个或两个以上折射球面的曲率中心在同一直线上，就组成**共轴球面系统**（coaxial spherical system）。连接各球心的直线称为共轴系统的主光轴。

光通过共轴球面系统后如何成像，完全取决于入射光依次在每一个折射面上折射的结果。在成像过程中，前一个折射球面所成的像，就是相邻的后一个折射球面的物，以此类推。因此，可应用单球面折射公式，采用逐次成像法，直到求出通过最后一个折射球面所成的像，此像即为物体通过整个共轴球面系统所成的像。

例 16.2 玻璃球（ $n=1.5$ ）的半径为 10cm，有一点光源放在玻璃球前 40cm 处。求近轴光线通过玻璃球后所成的像的位置。

解：由单球面折射公式

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

对第一折射面而言， $n_1 = 1.0$ ， $n_2 = 1.5$ ， $r = 10\text{cm}$ ， $u_1 = 40\text{cm}$ ，代入上式得

$$\frac{1.0}{40} + \frac{1.5}{v_1} = \frac{1.5 - 1.0}{10}$$

由此解得： $v_1 = 60\text{cm}$

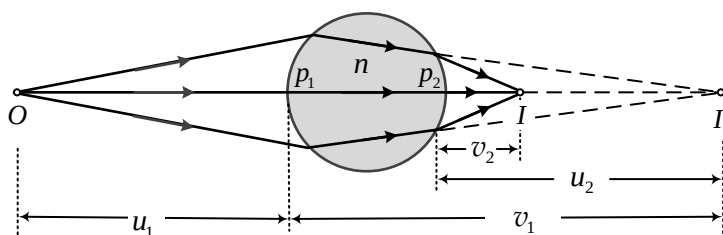


图 16.8 例 16.2 图

如果没有第二折射球面， I_1 应在 P_1 后面 60cm 处。显然 I_1 对于第二折射球面来说是虚物，则由题意可得

$$u_2 = 20 - 60 = -40(\text{cm}), \quad n'_1 = 1.5, \quad n'_2 = 1.0, \quad r' = -10\text{cm}$$

再一次代入单球面折射公式，得

$$-\frac{1.5}{40} + \frac{1}{v_2} = \frac{1.0 - 1.5}{-10}$$

解得： $v_2 = 11.4\text{cm}$

因此，最后成像在玻璃球后面 11.4cm 处，为实像。整个系统成像过程如图 16.8 所示。

§ 16.4 透 镜

透镜 (lens) 是具有两个折射球面的共轴系统，在两折射球面之间充满均匀的透明物质。我们可以根据透镜的厚度，将透镜分为薄透镜、厚透镜；根据透镜折射面的形状可将透镜分为球面透镜（简称透镜）及柱面透镜等。

16.4.1 薄透镜

1. 薄透镜成像公式 焦距和光焦度

所谓**薄透镜** (thin lens), 即组成透镜的两个球面顶点之间距离 P_1P_2 (透镜厚度) 与透镜焦距相比很小, 可以忽略不计。下面以图 16.9 所示的凸凹薄透镜为例进行讨论。

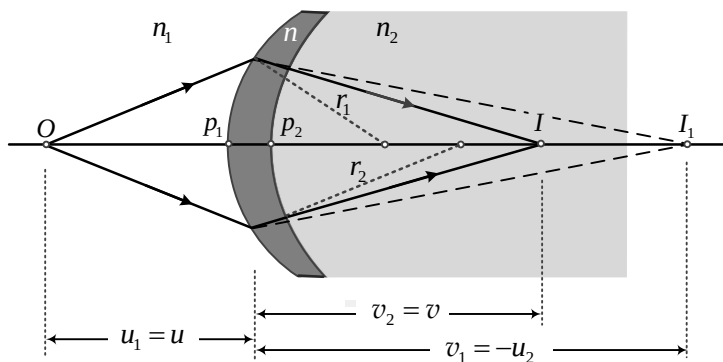


图 16.9 薄透镜成像

设折射率为 n 的凸凹薄透镜置于折射率为 n_1 和 n_2 两种介质界面处, 从主光轴物点 O 发出的光经透镜折射后成像于 I 处, 如图 16.9 所示。以 u_1 、 v_1 、 r_1 和 u_2 、 v_2 、 r_2 分别表示第一折射面和第二折射面的物距、像距和曲率半径。以 u 、 v 分别表示透镜的物距和像距。因为是薄透镜不计厚度, 则有: $u_1 \approx u$, $v_1 \approx -u_2$, $v_2 \approx -v$ 。将它们分别代入单球面折射公式 (16.7) 得

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{u} + \frac{n}{v_1} &= \frac{n - n_1}{r_1} \\ -\frac{n}{v_1} + \frac{n_2}{v} &= \frac{n_2 - n}{r_2} \end{aligned}$$

上述两式相加后整理, 则有:

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \quad (16.13)$$

式 (16.13) 称为**薄透镜成像公式**。公式中 u 、 v 、 r_1 、 r_2 的正、负号仍然遵守前面的符号规则。式 (16.13) 对各种形状的凸、凹薄球面透镜皆适用。

当像距为无穷大 ($v = \infty$) 时, 对应的物距就是薄透镜的第一焦距; 当物距为无穷大 ($u = \infty$) 时, 对应的像距就是薄透镜的第二焦距。由此, 根据式 (16.13) 可以得出薄

透镜左右两边焦距分别为

$$f_1 = \left[\frac{1}{n_1} \left(\frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (16.15a)$$

$$f_2 = \left[\frac{1}{n_2} \left(\frac{n - n_1}{r_1} - \frac{n - n_2}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (16.15b)$$

如果薄透镜前后介质折射率相同 $n_1 = n_2 = n_0$ ，即薄透镜处在折射率为 n_0 某种媒质中，则薄透镜的成像公式 (16.13) 可简化为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{(n - n_0)}{n_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (16.16)$$

此时，透镜的两个焦距 f_1 和 f_2 相等，可用 f 表示，即

$$f = \left[\frac{(n - n_0)}{n_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (16.17)$$

一般来说，薄透镜通常放置在空气中 ($n_0 = 1$)，如图 16.10 所示，由此得**空气中的薄透镜**焦距为

$$f = \left[(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (16.18)$$

这样，式 (16.16) 所薄透镜的成像公式最后可简化为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (16.19)$$

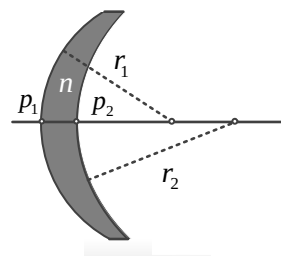


图 16.10 空气中的薄透镜

这就是著名的**薄透镜成像的高斯公式**。

透镜的焦距越短，它对光线的会聚或发散的本领越大，为此常用焦距的倒数 $1/f$ 表示透镜对光线的会聚或发散本领，这同样称为**光焦度**，也用 Φ 表示，即

$$\Phi = \frac{1}{f} \quad (16.20)$$

当焦距以“米”为单位时，光焦度的单位仍为屈光度，用 D 表示，人们在配制眼镜时常将透镜的光焦度以“度”为单位，其换算关系为：1D = 100 度。对近视眼镜， $\Phi < 0$ ，老花镜 $\Phi > 0$ 。

例 16.3 用折射率为 1.5 的玻璃制成的平凸薄透镜的形状如图 16.11 所示, 已知凸球面的半径为 25cm, 求该透镜置于空气中的光焦度和焦距?

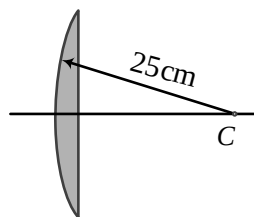


图 16.11 例 16.3 图

解 先考虑光线从球面一侧入射, 此时有

$$n_0 = 1 \quad n = 1.5 \quad r_1 = +25\text{cm} \quad r_2 = \infty$$

应用式 (16.19), 得

$$f = \left[(1.5 - 1) \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{\infty} \right) \right]^{-1} = 50 \text{ (cm)}$$

若考虑光线从平面一侧入射, 则有

$$n_0 = 1 \quad n = 1.5 \quad r_1 = \infty \quad r_2 = -25\text{cm}$$

再次应用式 (16.19), 得

$$f = \left[(1.5 - 1) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-25} \right) \right]^{-1} = 50 \text{ (cm)}$$

由计算结果可以看出, 不管光线从透镜的哪一侧射入, 求出的焦距都是一样的。该透镜的光焦度为

$$\Phi = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.5\text{m}} = 2\text{D}$$

2. 薄透镜的单向放大率

如图 16.12 所示, 设近轴的且垂直于主光轴的物体高为 y , 其共轭像的高为 y' , 定义像高 y' 与物高 y 的比值为薄透镜的**单向放大率**, 用 m 表示, 即

$$m = \frac{y'}{y} \quad (16.21)$$

由图可得 $\frac{y'}{y} = \frac{v}{u}$, 因此, 知道了像距和物距, 就可

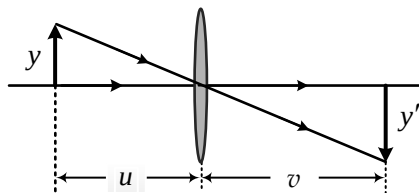


图 16.12 薄透镜的单向放大率

以计算出薄透镜的单向放大率。当 $|v| > |u|$ 时, 是放大的像; 当 $|v| < |u|$ 时, 是缩小的像。

16.4.2 薄透镜的组合

两个或两个以上薄透镜组成的共轴系统，称为薄透镜组合，简称透镜组。物体通过透镜组后所成像，可以用薄透镜公式，采用逐次透镜成像法求出，即先求第一透镜所成像，将此像作为第二透镜的物，求出第二个透镜所成像，依次类推，直至求出最后一个透镜所成的像，此像便是物体经过透镜组后所成的像。

最简单的透镜组是两个薄透镜紧密贴合在一起组成的。如图 16.13 所示。

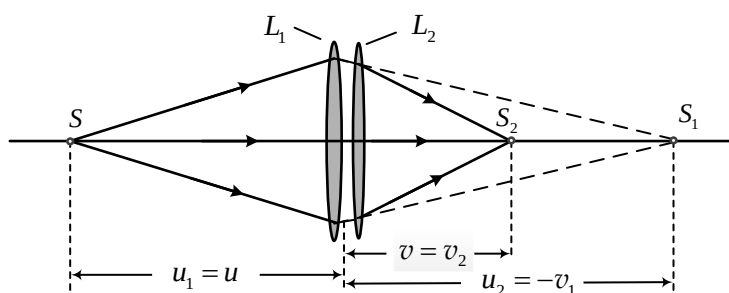


图 16.13 薄透镜的组合

设两个透镜焦距分别为 f_1 与 f_2 ，透镜组物距为 u ，像距为 v ，物体 S 经透镜 L_1 成像在 S_1 处，相应的物距和像距为 u_1 与 v_1 ，并且 $u_1 = u$ ，由透镜成像的高斯公式 (16.20) 得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

对于第二个透镜，有 $u_2 = -v_1$ ， $v_2 = -v$ ，则

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}$$

两式相加，得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (16.22)$$

所以透镜组焦距 f 为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (16.23)$$

即紧密接触薄透镜组的等效焦距的倒数等于组成它的各透镜的焦距的倒数之和。

如果以 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ 分别表示第一透镜、第二透镜和透镜的光焦度，它们之间的关系为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (16.24)$$

这一关系常被用来测量透镜的光焦度。如测定某近视眼镜片（凹透镜）的光焦度，即用已知光焦度的凸透镜与它紧密接触，使组合后的光焦度为零，即光线通过透镜组后既不发散也不会聚，光线的方向不改变。此时 $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$ 或 $\Phi_1 = -\Phi_2$ ，即两透的光镜焦度数值相等，符号相反。

例 16.4 凸透镜 L_1 和凹透镜 L_2 的焦距分别为 20cm 和 40cm， L_2 在 L_1 右边 40cm 处。在透镜 L_1 左边 30cm 处放置某物体，求物体经透镜组所成的像位置？

解：由透镜成像的高斯公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

对于 L_1 透镜，由题意可知： $f_1 = 20\text{cm}$ ， $u_1 = 30\text{cm}$ ，将此代入高斯公式，可解得

$$v_1 = 60\text{cm}$$

因 $v_1 > 0$ ，表示成的是实像。

L_1 透镜成的像对 L_2 来说就是“物”，由两透镜的位置关系可知

$$u_2 = 40 - 60 = -20\text{cm} \quad (\text{虚物}) \quad f_2 = -40\text{cm}$$

将这些数据再次代入高斯公式，得： $-\frac{1}{20} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{40}$

由此解得： $v = 40\text{cm}$

因 $v = 40\text{cm} > 0$ ，表明通过 L_2 成的也是实像。

16.4.3 厚透镜

厚透镜（thick lens）和薄透镜一样，也是包含两个折射球面的共轴系统，不同的是两折射球面顶点之间的距离较大，不能忽略。厚透镜成像可以利用逐次成像法；也可以利用三对**基点**（cardinal points），利用三对基点不仅可以简化厚透镜的成像过程，而且可以简化任何复杂的共轴球面系统的成像过程，并有助于了解整个共轴系统的成像特点。

这三对基点包括：

1. 两个焦点：将点光源放在主光轴上某点，若点光源发出的光线经厚透镜后成为平行于主光轴的平行光线，如图 16.14 中的光线（1），则这一点称为厚透镜的第一主焦点 F_1 。

若平行于主光轴的光线经厚透镜后交于主光轴上某点 F_2 ，则 F_2 点称为厚透镜的第二主焦点，如图 16.14 中光线 (2)。

2. 两个主点：在图 16.14 中，通过 F_1 的入射光线 (1) 的延长线与经过整个系统折射后出射光线的反向延长线相交于 B_1

点。过 B_1 点作垂直于主光轴的平面且交于主光轴 H_1 点， H_1 点称为折射系统的第一主点， $B_1H_1A_1$ 平面称为第一主平面。同样，平行于主光轴的入射光线 (2) 的延长线与经过整个系统折射后的出射光线的反向延长线相交于 A_2 点，过 A_2 点作垂直于主光轴的平面交于主光轴 H_2 点， H_2 点称为折射系统的第二主点， $B_2H_2A_2$ 平面称为第二主平面。

在图 16.14 中，无论光线在折射系统中经过怎样的曲折路径，在效果上只等于在相应的主平面上发生一次折射。通常将第一焦点 F_1 到第一主点 H_1 的距离称为第一焦距 f_1 ，物点到第一主平面的距离称为物距。第二焦点 F_2 到第二主点 H_2 的距离称为第二焦距 f_2 ，像到第二主平面的距离称为像距。

3. 两节点：在厚透镜的主光轴上可以找到两点 N_1 和 N_2 ，如图 16.15 所示。光线通过它们时不改变方向，仅发生平移，即以任何角度射向 N_1 点入射的光线都以相同的角度从 N_2 射出。 N_1 、 N_2 分别称为厚透镜的第一节点和第二节点。 N_1 和 N_2 的性质类似于薄透镜的光心。

只要知道厚透镜三对基点在折射系统中的位置，则可像薄透镜那样利用三条特殊光线中的任意两条求出经系统折射后所成的像。厚透镜的三条特殊光线如图 16.16 所示：(1) 平行于主光轴的光线在第二主平面折射后通过第二主焦点 F_2 ；(2) 通过第一节点 N_1 的光线从第二节点 N_2 平行于入射方向射出；(3) 通过第一主焦点 F_1 的光线；在第一主平面折射后平行于主光轴射出。

各基点的位置决定于折射系统的具体条件。如果折射系统前后媒质的折射率相同（如折射系统置于空气中），则 $f = f_1 = f_2$ 在这种情况下，物距 u 、像距 v 、焦距 f 之间的

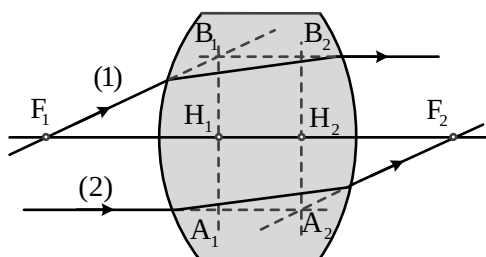


图 16.14 厚透镜的两个焦点和两个主点

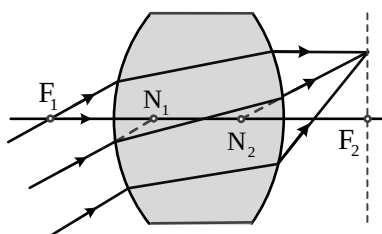


图 16.15 厚透镜的两个节点

关系等同于薄透镜成像的高斯公式，即

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

式中 u 、 v 、 f 皆以相应的主平面为起点算计。

相比较而言，单球面和薄透镜也有三对基点，单球面的两主点重合在单球面顶点 P 上，其两节点重合在单球面的曲率中心 C 点上；而薄透镜的两主点及两节点都重合在薄透镜的光心上。

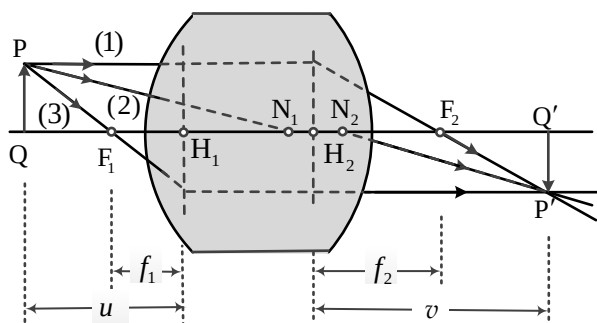


图 16.16 厚透镜作图法求物体的像点

16.4.4 柱面透镜

如果薄透镜的两个折射面不是球面，而是圆柱面的一部分，这种透镜称为**柱面透镜**（cylindrical lens），如图 16.17 所示。柱面透镜的两个折射面可以都是柱面，也可以一面为圆柱面，另一折射面为平面；它有凸、凹两种形式，即凸柱面透镜、凹柱面透镜。

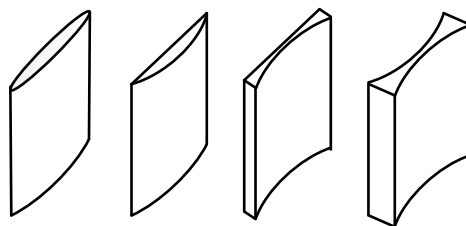


图 16.17 柱面透镜

通常将包含主光轴各个方向的平面称为子午面，子午面与折射面之间的交线称为子午线。

如果折射面在各个方向上的子午线曲率半径不相同，这种折射面为非对称折射面，由这种折射面组成的共轴系统称为非对称折射系统。非对称折射系统对通过各子午面光线的

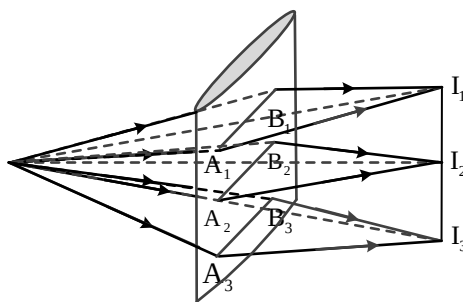


图 16.18 柱面透镜成像

折射本领不同，因此，主光轴上点光源发出的光束经此系统折射后不能形成一个清晰的点像，而是一条像线。如图 16.18 所示的柱面透镜在水平方向焦度最大且为正值，对光线起会聚作用；在竖直方向的焦度为零，折射光线不改变方向。所以在图 16.18 所示的情况

下，点状物体经柱面透镜后形成的像为一条竖直线 $I_1I_2I_3$ 。

16.4.5 透镜的像差

由于各种原因，由物体发出的光线经透镜折射后所成的像与原物体有偏差，这种现象称为透镜的**像差**(aberration)。产生像差的原因较多，此处仅简单介绍**球面像差**(spherical aberration)和**色像差**(chromatic aberration)。

1. 球面像差

主光轴上点状物体发出的远轴光线和近轴光线经透镜折射后不能会聚于主光轴上同一点，如图 16.19 (a) 所示，这种现象称为**球面像差**，简称**球差**。产生球差的原因是通过透镜边缘部分的远轴光线比通过透镜中央部分的近轴光线偏折得多一些，于是，通过透镜的远轴光线与近轴光线不能会聚于同一点，点状物体或点光源不能形成点像，而是形成圆斑。

减小球面像差最简单的方法是在透镜前加一个光阑，如图 16.19 (b) 所示。光阑只让近轴光线通过透镜，因此可以生成一个清晰的像点。减小球差的另一方法是在会聚透镜之后放置发散透镜，因为发散透镜对远轴光线的发散作用强于对近轴光线。这样组成的透镜组虽然降低了焦距，却减小了球差。

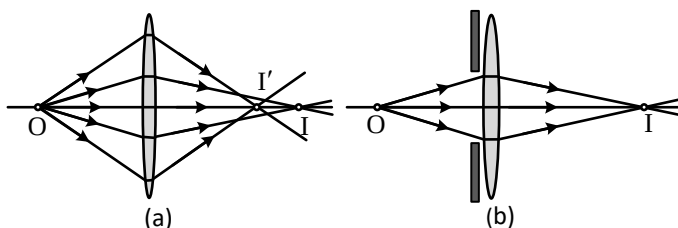


图 16.19 球差及其校正

2. 色像差

波长不同的光在同一种光学材料中的折射率略有差异，波长越短，其折射率越大，所以白色光通过透镜后，波长短的光偏折较多，波长长的光偏折较少。不同波长的光通过透镜成的像不在同一点，我们把这种现象称为**色像差**，简称**色差**。透镜越厚，色像差越明显。

纠正色像差的方法是将具有不同折射率的凸透镜和凹透镜适当配合，使一个透镜的色像差能被另一透镜所抵消。例如冕牌玻璃的色散能力较火石玻璃弱，因此，在冕牌玻

璃的凸透镜上胶粘一块火石玻璃做的凹透镜，则通过凸透镜所产生的色散大部分被凹透镜所抵消，达到消除色像差的目的。

§ 16.5 眼睛的光学系统

16.5.1 眼的光学结构

图 16.20 是眼的水平剖面图。眼球的前表面是一层透明的膜，称为角膜，外界的光线由此进入眼内。角膜后面是虹膜，虹膜中央有一圆孔称为瞳孔，瞳孔大小通过肌肉收缩而改变，以调节进入眼内的光能量，瞳孔具有光阑的作用。虹膜之后是晶状体，它是透明而富有弹性的组织，形如双凸透镜，其表面的曲率半径可随睫状肌的紧张或松弛而变化。眼球的内层称为视网膜，上面布满视觉神经，也是光线成像的地方。视网膜正对瞳孔处的小块黄色区域称为黄斑，黄斑中央的凹陷称为中央凹，对光线最敏感的地方。

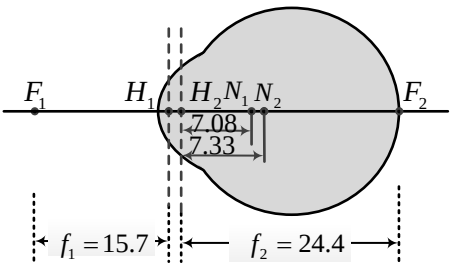


图 16.20 古氏平均眼

从几何光学的角度来看，人眼是由多种介质组成的共轴球面系统，由外界进来的光通过眼睛共轴球面系统最后成像在视网膜上。根据古氏（Gullstrand）对眼睛三对基点的计算，如图 16.20 所示， H_1 、 H_2 靠得很近， N_1 、 N_2 靠得也很近，三基点的位置和单球面接近，因此常常把眼睛进一步简化为单球面折射系统，称为简约眼（reduced eye），如图 16.21 所示。

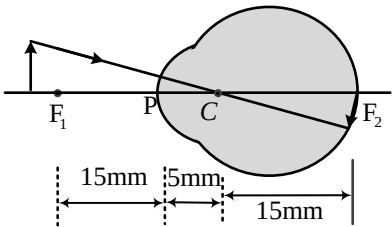


图 16.21 简约眼

简约眼用单球面代替角膜，它的曲率半径在眼睛处于完全放松状态时为 $r = 5\text{mm}$ ，介质折射率取 $n = 1.33$ ，由此得出的焦距为： $f_1 = 15\text{mm}$ ， $f_2 = 20\text{mm}$ 。

眼睛的焦度能在一定范围内改变，将远近不同物体成像在视网膜上，眼睛这种改变自身焦度的本领称为眼的调节（accommodation）。眼的调节主要通过睫状肌收缩改变晶状体的曲率半径达到目的。但这种调节有一定限度，当被观察物体在无穷远时，睫状肌

完全放松，此时晶状体曲率半径最大，焦度最小，大约为58.6D。观察近处物体时，晶状体曲率半径变小（睫状肌收缩），眼的焦度较大，最大可达到70.6D。由此可见，在观察不同距离的物体时，眼的光学常数不尽相同。

眼睛不调节时能看清的最远处物体与眼睛之间的距离称为**远点**（far point），正常视力的人（常称为正视眼），其远点应该在无穷远处，即平行光刚好会聚视网膜上。若物体逐渐靠近眼睛，晶状体的曲率半径随之减小，眼睛的焦度增大；眼睛可能处于最大调节状态（晶状体曲率半径最小）也无法看清物体。眼睛处于最大调节状态能看清的物体与眼睛之间的距离称为**近点**（near point）。视力正常的人，近点距离约为10~12cm。近视眼是远点变近，远视眼是近点变远。

人们在观察物体时，眼睛需要反复调节而容易产生疲劳。在日常工作中，不易引起眼睛过渡疲劳的最适宜距离约为25cm，这个距离称为视力正常人的**明视距离**（comfortable visual distance）。

16.5.2 眼的分辨本领及视力

从物体两端射入到眼中节点的光线所夹的角度称为**视角**（visual angle），如图16.22。视角决定于物体在视网膜成像的大小，视角越大，成像越大，眼睛越能看清物体细节。视角与物体的大小、物体与眼睛间的距离有关。实验证明，视力正常的眼睛能分辨最小视角约为1分，与之对应在明视距离处眼睛能分辨的两物点之间的最短距离约为0.1mm。通常用眼睛能够分辨的最小视角 α 的倒数表示眼睛的分辨本领，并称之为**视力**（visual acuity）。

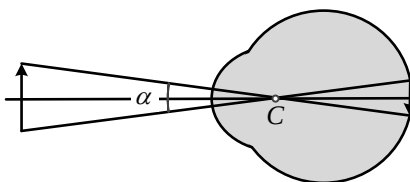


图 16.22 眼睛的视角

$$\text{视力} = \frac{1}{\alpha}$$

应用上式计算视力时，最小视角以分（′）为单位。例如，最小视角为10分，相应的视力为0.1，若最小视角为0.5分，相应的视力为2.0。由这种视力记录法所绘的视力表称为国际标准视力表。另一常用视力表为国家标准对数视力表，即五分法视力表，五分法视力用 L 表示， L 与最小视角的关系为

$$L = 5 - \log \alpha$$

若最小视角为10分，相应对数视力为4.0；若最小视角为0.5分，相应的对数视力为5.3。

16.5.3 眼的屈光不正及其矫正

眼睛不调节时，若平行光进入眼内刚好在视网膜上形成一个清晰的像，如图 16.23 所示。这种眼睛称为**正视眼**。否则称为非正视眼或屈光不正眼，屈光不正包括**近视眼**（near sight）、**远视眼**（far sight）和**散光眼**（astigmatism）三种。

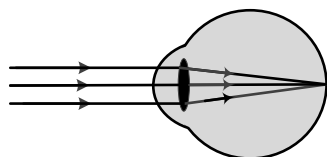


图 16.23 正视眼

1. 近视眼

若眼睛不调节时，平行光进入眼内会聚于视网膜前面，而在视网膜上的像是模糊的，此类眼睛称为近视眼，如图 16.24（a）所示。近视眼看不清远处的物体，需将物体移近到眼前某一位置才能看清。由此可见，近视眼的远点不在无穷远。近视产生的原因可能是角膜或晶状体的曲率半径太小，对光线折射太强；或者眼球的前后直径太长。

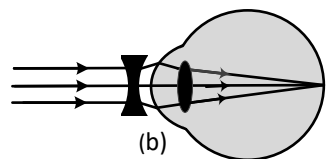
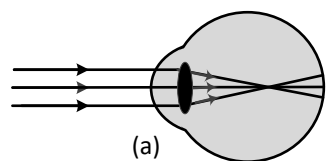


图 16.24 近视眼及其校正

近视眼的矫正方法是配戴一副适当度数的凹透镜，使光线进入眼睛之前经凹透镜适当发散，再经眼睛折射后在视网膜上可以清晰地成像，如图 16.24（b）所示。即近视眼所配戴的凹透镜能使平行光线成虚像在近视眼患者的远点处，这样近视眼在眼睛不调节的情况下即可看清无穷远处的物体。

例 16.5 某近视眼患者的远点在眼前 $X_n = 100\text{cm}$ 处，今欲使其看清无限远的物体，则应配戴多少度的眼镜？

解：配戴的眼镜必须使无限远的物体在眼前 100cm 处成一虚像，如图 16.25。设眼镜的焦距为 f ， $u = \infty$ ， $v = X_n = -1\text{m}$ 。代入薄透镜成像公式，得

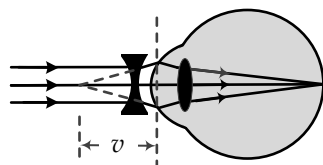


图 16.25 例 16.5 图

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

由此解得

$$\Phi = \frac{1}{f} = -\frac{1}{1.00\text{m}} = -1\text{D} = -100\text{度}$$

此近视眼患者应配戴-100度为的凹透镜。

2. 远视眼

若眼睛不调节时，平行光射入眼内成像于视网膜之后，如图 16.26 (a) 所示，此类眼睛称为远视眼。远视眼在不调节时既看不清远处物体，也看不清较近的物体。虽然通过调节可以看清远处物体，但近处物体仍然看不清。远视眼的近点距离大于正视眼。

远视的原因可能是角膜或晶状体折射面的曲率半径太大，焦度太小；或者是眼球前后直径太短，物体的像成在视网膜之后。

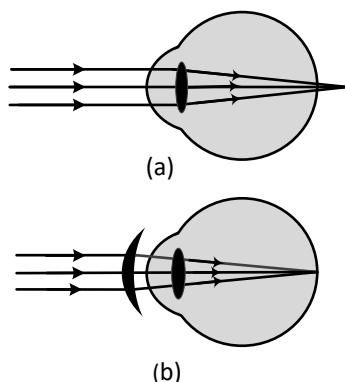


图 16.26 远视眼及其校正

远视眼矫正的方法是配戴一副适当焦度的凸透镜，让平行光线进入眼睛之前先经凸透镜会聚，再经眼睛折射后会聚于视网膜上，如图 16.26 (b) 所示。由于远视眼的近点较正视眼的远一些，因此，远视眼在看眼前较近的物体时，所选择的凸透镜必须将此物体的虚像成在远视眼的近点处。

例 16.6 某远视眼患者的近点距离为 $X_n = 1.2\text{m}$ 处，要看清眼前 25cm （明视距离）处的物体，问应配戴怎样的眼镜？

解：所配戴眼睛应使眼前 25cm 处物体在眼前 1.2m 处成虚像，如图 16.27。则有： $u = 0.25\text{m}$ ， $v = X_n = -1.2\text{m}$ ，代入薄透镜成像公式，得

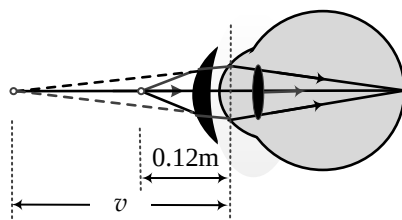


图 16.26 例 16.7 图

$$\Phi = \frac{1}{f} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{1}{0.25\text{m}} - \frac{1}{1.2\text{m}} = 3.17\text{D} \quad (\text{D}) = 317\text{度}$$

即此远视眼患者应配戴 317 度的凸透镜。

3. 散光眼

近视眼和远视眼都属于球面屈光不正，其角膜是球面，在各个方向子午线的曲率半径皆相等。散光眼则不同，其角膜在各个方向子午线的曲率半径皆不相等，点物发出的

光线经角膜折射后不再形成清晰的点像，而是形成一条短线。散光眼属于非对称折射系统，如同柱面镜一样。图 16.28 表示了散光眼的角膜及其成像，此散光眼的眼球纵向子午线半径最短，横向子午线的半

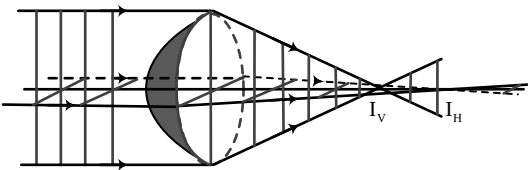


图 16.28 散光眼成像

径最长，其它方向子午线半径介于二者之间。当来自远处物体的平行光线经角膜折射后纵向子午面内的光线会聚于 I_v 处，形成一条竖直线条状的像；横向子午面内光线会聚于 I_h 处，形成一条水平线条状的像；其他方向子午面内光线会聚于 I_v 和 I_h 之间，在这之间的不同位置处则形成大小不同的椭圆或者圆形像。由此可见，散光眼对任何位置的点物均不能产生点像。因此，有散光眼的人常把一个点物体看成一条很短的线条，故看物体时模糊不清。

散光眼的矫正方法是配戴适当焦度的柱面透镜，以矫正屈光不正子午线的焦度。散光有近视散光和远视散光之分。因此配用的眼镜是由柱面透镜和球面透镜组成的。

§ 16.6 几种常用的光学仪器

16.6.1 放大镜

为了看清楚微小物体或物体的细节，需要把物体移近眼睛，以增大物体对人眼的视角，使物体在视网膜上成一较大的像。但是，眼睛的调节是有限的，要看清微小物体的细节，既要使物体对眼睛有足够大的视角，又要有合适的距离。显然，对人眼来说，这两个要求是相互矛盾的。解决此矛盾的办法是在眼前放置一个凸透镜，以增大物体对人眼的视角。用于这一目的的凸透镜，称为**放大镜**（magnifier）。

使用放大镜时，常常将物体放在凸透镜的一倍焦距以内、靠近透镜焦点处，使物体经放大镜折射后形成正立放大的虚像。

在图 16.29（a）中，物体放在明视距离处，眼睛直接观察物体的视角为 β ；利用放大镜观察同一物体时视角增为 γ ，如图 16.29（b）。通常用这两个视角的比值 γ/β 衡量放大镜放大视角的能力，称为放大镜的**角放大率**（angular magnification），用 α 表示，即

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta} \quad (16.25)$$

由于物体线度 y 很小，故视角 β 、 γ 都很小，则

$$\tan \beta \approx \beta = \frac{y}{25}$$

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{y}{f}$$

将上述两式代入 (16.14) 中，得

$$\alpha = \frac{y}{f} \cdot \frac{25}{y} = \frac{25}{f} \quad (16.26)$$

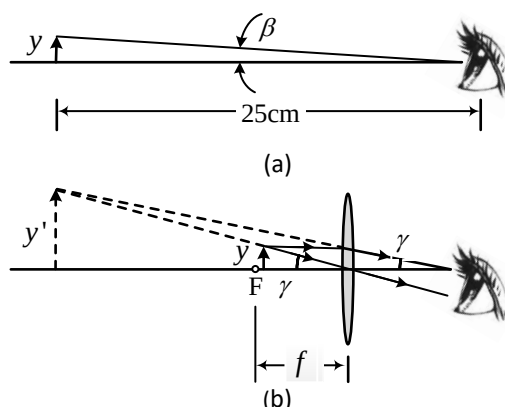


图 16.29 放大镜原理图

式中 f 为放大镜的焦距。此式表明，放大镜的角放大率与它的焦距 f 成反比，即放大镜焦距越小，角放大率越大。但如果 f 太小，透镜会很凸、很厚，就会出现色像差，所以单一透镜放大镜的放大率一般都小于 3 倍（写成 $3\times$ ），若是组合透镜，放大率可以达到 $20\times$ ，并且像差还会减小。

16.6.2 光学显微镜

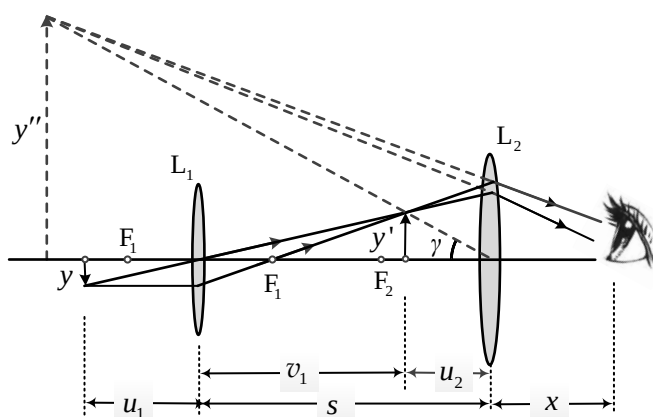


图 16.30 光学显微镜的光路图

显微镜是生物学和医学中广泛使用的仪器，其放大倍数为 $10^2 \sim 10^3$ 倍，也是人们了解微观世界的重要工具。普通光学显微镜由两组会聚透镜组成，其光路如图 16.30 所示。

L_1 称为物镜 (objective), L_2 称为目镜 (eyepiece)。实际的物镜和目镜分别由多个薄透镜组成, 其目的在于减小各种像差, 使成像清晰, 便于观察。将被观察的物体 (物体的长度为 y) 倒置在靠近物镜的第一焦点之外, 经 L_1 折射后在目镜的一倍焦点内形成一个放大的实像 (实像的长度用 y' 表示), 实像再经目镜放大后成正立虚像 (虚像的长度用 y'' 表示), 虚像相对人眼张开的视角为 γ 。图 16.31 是医用光学显微镜的实物照片。

据光学仪器放大率的定义, 显微镜的放大率 M 为

$$M = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}$$

由图知, $\tan \gamma = \frac{y''}{v_2 + x} \approx \frac{y''}{v_2} = \frac{y'}{u_2}$, 一般情况下 x 取为零,

$\tan \beta = \frac{y}{25}$, 代入上式得

$$M = \frac{y'}{u_2} \cdot \frac{25}{y} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{25}{u_2} = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{25}{u_2}$$

式中: $y'/y = v_1/u_1$ 称为物镜的单向放大率 (用 m 表示),

$25/u_2 \approx 25/f_2$ 是目镜的角放大率 (用 α 表示, f_2 为目镜焦距), 代入上式得

$$M = \frac{v_1}{u_1} \cdot \frac{25}{f_2} = m\alpha \quad (16.27)$$

即显微镜的放大率等于物镜的单向放大率与目镜的角放大率的乘积。在实际使用的显微镜过程中, 常配有各种放大率的物镜和目镜, 适当组合可以获得所需的放大率。

由于被观察物体靠近物镜第一焦点, $u_1 \approx f_1$, 且物镜和目镜的焦距都很小, 所以物镜的单向放大率 $v_1/u_1 \approx s/f_1$, s 是显微镜筒的长度 ($s \approx v_1 + f_2 \approx v_1$), 因此显微镜的放大率又可写成

$$M \approx \frac{s}{f_1} \cdot \frac{25}{f_2} = \frac{25s}{f_1 f_2} \quad (16.28)$$

显微镜放大率与所用物镜和目镜的焦距的乘积成反比。



图 16.31 光学显微镜的实物照片

16.6.3 望远镜

望远镜 (telescope) 是为观察远处物体而设计的。远物发出的光近似为平行光，对眼睛所张的视角很小，所以望远镜的作用是增大视角，并不要求它将物成像于明视距离处。

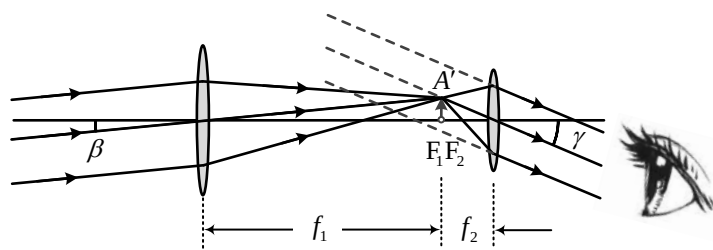


图 16.32 开普勒望远镜的光路图及其角放大率

望远镜也是由物镜和目镜组成，物镜是一个口径较大焦距较长的凸透镜，目镜有两种：是凸透镜的称为开普勒望远镜，是凹透镜的称为伽利略望远镜。

开普勒望远镜的原理如图 16.32 所示。 L_1 是物镜，其焦距为 f_1 ， L_2 是物镜，其焦距为 f_2 。从远处物体上的某一点 A 射来的平行光成像于物镜的第二焦平面上的 A' 点，调节目镜，使物镜的第二焦点与目镜的第一焦点重合，则 A' 点发出的光经目镜后又成为平行光在无限远处成一放大的虚像。

至于放大率的计算，望远镜中主要考虑看物体的视角增大了多少倍。这与显微镜中有所不同，因为在显微镜中我们确实看到像比物大了若干倍，而在望远镜中我们看到的像不可能比物体大，只是看起来远处的物体被“移近了”，所以我们看物体的视角变大了。

假设远处的物 A 点射来的光束对眼睛（也就是对物镜）的张角为 β ，通过目镜成像后，由 A' 点射出的光束对眼睛（也就是对目镜）的张角为 γ ，则望远镜的角放大率定义为

$$M = \frac{\gamma}{\beta}$$

因 γ 和 β 都很小，由图 16.31 可得： $\gamma = \tan \gamma = \frac{Y'}{f_2}$ ， $\beta = \tan \beta = \frac{Y'}{f_1}$ ，所以

$$M = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{f_1}{f_2} \quad (16.29)$$

即望远镜的放大率等于物镜焦距与目镜焦距之比。物镜焦距越长，目镜焦距越短，望远镜的角放大率就越大。

思考题

16.1 如图所示的折射球面在什么条件下对光线起会聚作用？在什么条件下对光线起发散作用？

16.2 对一个薄透镜，在什么条件下实物成实像？在什么条件下实物成虚像？在什么条件下虚物成实像？在什么条件下虚物成虚像？

16.3 将光源和观察屏的位置固定，两者相距 L ，一个薄透镜放在它们之间的某个位置，使光源恰好成像于屏上。问透镜的焦距在什么范围内才会有两个、一个或没有这样的位置？

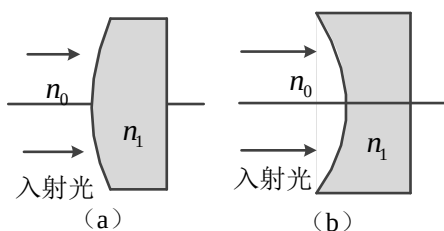
16.4 在一个平凸薄透镜成像时，其平面对着物。若将透镜翻转过来，使其凸面对着物，同时保持透镜位置不变。问像的位置是否会变？为什么？

16.5 一个薄凸透镜的焦距为 f_1 ，另一个薄凹透镜的焦距为 f_2 ，两者怎样放置才能使平行光通过它们后仍然是平行光？ f_1 和 f_2 必须满足什么条件？

16.6 在会聚透镜的焦点处某处放一点物，经透镜成像时，若将透镜遮去一半，成像情况是否变化？若将透镜沿直径切开并使两部分稍稍分离，然后用不透光材料堵住缝隙，成像情况又如何？

16.7 一散光眼的水平子午面屈光正常，但平行光通过垂直子午面折射后聚在视网膜之后，此人应戴何种透镜？镜轴方向如何？

16.8 为什么放大镜、显微镜都是用角放大率来反映它们的放大本领，而不是用单向放大率？



思考题 16.1 图

习题

文档 16.1 习题答案

6.9 某人眼内有一异物，医生从外边观察到该异物的深度是 4mm ，求该异物在眼内的实际深度是多少？（眼睛可看作单球面系统，球面半径为 5mm ，折射率为 1.33 。）

16.10 一半径为 r 的球形透明体置于空气中，在距球面 $2r$ 处有一点光源。若入射光在球体内呈平行光，试求：

(1) 求该球体的折射率。

(2) 若将该球置于折射率为 1.30 的液体中，点光源应置于何处才能使球体内出现平行光？

16.11 有厚 4.00cm 、折射率为 1.52 的厚玻璃，它一侧是曲率半径为 2.00cm 的凸球面，另一侧是平面，若有一点光源放在它的光轴上距球面 8.00cm 处，试求下列两种情况下该点光源通过这块玻璃所成的像在何处？是实像还是虚像？

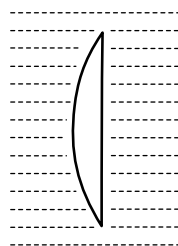
(1) 厚玻璃放置于空气中；

(2) 厚玻璃置于折射率为 1.33 的透明液体中。

16.12 一个半径为 R 的薄壁玻璃球盛满水，若把一物点置于球面前 $3R$ 处，求最后的像的位置（玻璃壁的影响忽略不计，水的折射率为 $4/3$ ）。

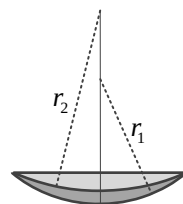
16.13 一个薄的平凸透镜（ $n=1.50$ ）在空气中的焦距为 20cm 。今令其一面与水相接，求此系统的焦距。

16.14 用两块厚度可以忽略不计的薄玻璃片粘合成一个空气透镜，一块是平面，另一块是曲率半径为 25cm 的球面，如图所示。求此透镜置于水（折射率为 $4/3$ ）中时的焦距，问此透镜是会聚的还是发散的？



习题 16.14 图

16.15 一个会聚的弯月形薄透镜，所用玻璃的折射率为 1.5 ，两表面的曲率半径分别为 6cm 和 10cm ，凹面朝上放置且盛满水（折射率为 1.33 ），如图所示，试求这个水玻璃组合透镜的焦距。



习题 16.15 图

16.16 一个双凸薄透镜，它的两球面的曲率半径分别为 20.0cm 和 40.0cm ，若此透镜材料的折射率是 1.52 ，一物体放在透镜的主光轴上，距透镜 30.0cm ，试求：

- (1) 物体所成像的位置、大小、虚实；
- (2) 若透镜与物体都浸没在水中（水的折射率是 1.33 ），所成的像又如何？

16.17 共轴薄透镜 L_1 、 L_2 相距 20.0cm ， L_1 是焦距为 4.0cm 的凸透镜， L_2 是焦距为 50.0cm 的凹透镜，若有一物体在这两个透镜的主光轴上，与 L_1 的距离为 4.5cm ，求物体通过透镜组后所成的像在何处？大小、虚实如何？

16.18 有一物不易被接近，要测得它的高度可以用下面的方法：在适当距离处竖立一个屏幕，用一个凸透镜在物与屏幕之间来回移动，使物在屏幕上两次出现实像。若测得两次像高分别为 Y_1 和 Y_2 ，

试证明该物体的高度为： $Y = \sqrt{Y_1 Y_2}$ 。

16.19 某一凸透镜将某一物体成像于屏幕上，已知实像高 9cm ，物体到屏幕的距离为 100cm 。在物体到屏幕的距离保持不变的条件下，移动透镜至一适当位置，在屏幕上能得到高为 4cm 的实像，试求：

- (1) 透镜移动的距离；
- (2) 透镜的焦距。

16.20 某近视眼的远点在其眼前 25cm 处，问他应配戴何种眼镜才能看清远的物体？

16.21 一个人看近物时需戴 $+2$ 屈光度的眼镜，而看远物时需戴 -0.5 屈光度的眼镜，此人的近点、远点各在何处？

16.22 有三个放大镜，其光焦度分别为 10 屈光度、 12 屈光度和 17 屈光度，它们的角放大率各是多少？

16.23 一显微镜物镜的焦距是 10mm ，目镜焦距是 25mm ，两镜间距是 180mm 。若使物体最后成一虚像在观察者的明视距离处，试求物体到物镜的距离及该显微镜的放大率。

16.24 某显微镜目镜、物镜的焦距分别是 25mm 和 16mm，目镜、物镜间的距离是 221mm，目镜最后所成的像在无限远处，试求：

- (1) 所观察的物体到物镜的距离；
- (2) 物镜的单向放大率；
- (3) 显微镜的总放大率。

16.25 某显微镜备有焦距分别为 17mm、4mm 和 1.9mm 的物镜，以及角放大率为 $5\times$ 、 $10\times$ 的目镜，显微镜筒长为 170mm。则此显微镜最大和最小的总放大率分别是多少？

第 16 章 习 题 答 案

16.9 4.2 mm

16.10 点光源应置于距球面 $6.5r$ 处才能使球体内出现平行光

16.11 玻璃板后面, 距离板的后方平面 4.78cm 处, 实像; 玻璃板前面, 距离球面顶点 18.16 cm 处, 虚像

16.12 球面后 $3R$ 处

16.13 $f_1 = 20.0\text{cm}$, $f_2 = 26.7\text{cm}$

16.14 发散

16.15 15cm

16.16 175 cm, 放大的实像; -44.2cm , 放大的虚像。

16.17 L_2 的后方 23.5cm 处, 放大的实像。

16.18 证明略

16.19 20 cm; 24cm

16.20 -400 度的凹透镜

16.21 近点在眼前 0.5 m 处; 远点在眼前 2 m 处

16.22 2.5 倍, 3 倍, 5 倍

16.23 10.7 m, 180 倍

16.24 17.4mm; 11.3 倍; 113 倍

16.25 896 倍, 50 倍

第十七章 光的干涉

课件下载
第 17 章 光的干涉

人类对光的本性的研究和认识经历了一个螺旋式上升的历史过程。我国古代著名文献《墨经》最早记录了光的直线传播、光与影的关系以及小孔成像的现象与规律。人类最早系统地建立起来的关于光的学问是几何光学。为了解释光的本性，牛顿提出了光的微粒学说，认为光是一些有质量的微小弹性粒子流。他利用光的粒子学说，不仅成功地解释了光的直线传播规律，还利用光微粒与媒质界面的弹性碰撞理论解释了光的反射定律及折射定律，只不过按照这个理论牛顿推出了光在水中的传播速度大于光在空气中的传播速度。显然，这个推论与近代光学实验的结果相矛盾。虽然与牛顿同时代的荷兰物理学家惠更斯（Christian. Huygens, 1629-1695）提出了关于光本性的波动学说、并用光的波动学说和波传播的惠更斯原理解释了光的反射与折射现象，推出了光在水中的传播速度要小于光在空气中的传播速度这一正确的结论。但由于牛顿在科学界至高无上的绝对权威性，以及当时人们还没有办法测量光的传播速度，牛顿的微粒学说被人们广泛的认同了，直到 19 世纪初才开始受到学术界的质疑。

1801 年英国的医生与学者托马斯 杨（T·Young, 1773-1829）通过巧妙设计，观察到了光的双缝干涉现象，并利用惠更斯的波动理论成功的解释了双缝干涉实验的结果。此外，法国科学家菲涅尔（A.J. Fresnel, 1788-1827）于 1815 年利用波的干涉理论，对惠更斯原理进行了补充，提出了惠更斯-菲涅尔原理，成功地解释了光的圆孔衍射和圆屏衍射现象。1808 年，法国物理学家马吕斯（E.L. Malus, 1775-1812）还发现了光的偏振现象。这些都进一步确立了光的波动本质。1850 年，法国物理学家傅科首次从实验上证实了光在水中的传播速度小于光在空气中的传播速度，从而否定了牛顿的推论。于是光的波动学说被学术界普遍接受了。

到了十九世纪末，随着麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831-1879）的电磁理论的建立，以及赫兹（H. R. Hertz, 1857-1894）对电磁波的实验验证与研究，更全面彻底地揭示了光的电磁波本性的一面，从而奠定了光的波动学说的理论基础。

但是人类对光的本性的认识并没有因此而止步，黑体辐射的实验结果对光的电磁理论发出了严峻挑战。于是，德国物理学家普朗克（Max Planck, 1858-1947）的能量子学说应运而生，消除和解决了关于黑体辐射的理论与实验之间不可调和的矛盾。1905 年，

爱因斯坦 (A. Einstein, 1879-1955) 借用普朗克的能量子概念, 提出了光量子 (即光子) 学说, 正确合理地解释了光电效应现象。1923 年, 美国物理学家康普顿 (A. H. Compton, 1892-1962) 和他的研究生、中国学者吴有训关于康普顿散射效应的研究, 更进一步证实了光与物质相互作用时的粒子本性——光量子学说, 使得光子概念及其理论得以进一步证实和确立。可以说普朗克的能量子学说与爱因斯坦的光量子学说使得人类对光的本性认识也进一步深化和全面, 即当光在传播时, 它往往表现出波动性的一面, 当光与物质相互作用时, 又往往表现出粒子性的一面, 这就是光的波粒二象性。在此基础上人们又逐步建立了关于光的量子理论——描述光与物质相互作用的量子光学。

从二十世纪六、七十年代开始, 随着激光技术和光纤技术的研发和应用, 使得光学学科的内涵与范畴得以扩展和充实, 全息光学、信息光学、傅里叶变换光学以及非线性光学等光学新领域随之应运而生。

本章主要讨论波动光学中的干涉现象及其规律和应用。

§ 17.1 光的相干性

17.1.1 光的电磁理论

根据光的电磁理论, 光是一种波长在一定范围内的电磁波。通常意义下, 狭义的光是指电磁波的波长介于 400nm—760nm 范围之间的可见光, 其频率范围由 $\nu = c/\lambda$ 关系可知在 $7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ — $3.9 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 之间。而广义的光波概念不限于此。我们知道, 比红光的波长更长的光波还有人类看不见的红外线, 比紫光的波长更短的光波还有人类看不见的紫外线、X 射线和 γ 射线。这些光波和射线尽管它们的产生机制各不相同, 但与微波和无线电波一样, 都属于电磁波。

在可见光波中, 不同波长 (或频率) 的光波对应于不同的颜色, 表 17.1 给出了可见光的波长与颜色的对应关系。人们将只含有单一波长 (或频率) 的光波称为**单色光** (monochromatic light)。普通光源发出的光波中通常含有各种不同的波长 (或颜色) 的光波成份, 称为**复色光**。实验室中常用的钠光灯发出的黄光可以看成是单色光, 其平均波长为 589.3 nm。其它的如汞灯、氢灯等气体光源发出的光波中尽管含有多个不同波长的光波, 但是通过滤波依然可以得到很好的单色光。当然, 最好的单色光是激光器发出

的单色光波，例如 He-Ne 激光器发出的单色红光的波长为 632.8nm。

表 17.1 可见光的波长与颜色的对应关系

波长/nm	760-630	630-600	600-570	570-500	500-470	470-420	420-400
颜色	红	橙	黄	绿	青	蓝	紫

对于一列沿 x 轴正方向传播的单色平面电磁波，其波函数（波动表达式）可以写为

$$E(x,t) = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = E_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (17.1)$$

$$H(x,t) = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = H_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (17.2)$$

式中 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 是电磁波在介质中的传播速度， ϵ 和 μ 分别是介质的绝对电容率和绝对磁

导率， $\lambda = u/\nu$ 是电磁波的波长。在真空中，电磁波的传播速度为

$$u = c = 2.9978 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (17.3)$$

光的强度就是电磁波的平均能流密度，并用 I 表示，即

$$I = \frac{1}{2} u \epsilon E_0^2 \quad (17.4)$$

式 (17.4) 表明，在同一种均匀介质中，光的强度与光波中电场强度的振幅的平方成正比。在光学实验中，许多时候人们只需讨论光在同一种介质中的相对强度分布，所以，人们往往将电场强度振幅的平方 E_0^2 称为**相对光强**，通常也简称**光强**。

在光波中，振动的物理量是电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场强度矢量 $\mathbf{H}$ ，其中能引起人眼视觉效应或使各种感光材料曝光的物理量只是其中的电场强度矢量 $\mathbf{E}$ ，因此，通常人们将光波中的电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 称为**光矢量**，将电场强度的振动称为光振动，其振幅 E_0 称为光振幅。

当光在不同的介质中传播时，光的传播速度不同。人们将光在真空中的传播速度与光在介质中的传播速度之比称为该介质的折射率，用 n 表示，即

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (17.5)$$

式中 ϵ_r 、 μ_r 是介质的相对电容率和相对磁导率，上式表明介质的折射率与介质的电磁性质密切相关。对于各向同性的均匀介质，其折射率是一个常数。

17.1.2 普通光源的发光机制与相干性

能够发射可见光的物体都是光源，如天上的太阳和星星，燃烧的蜡烛，通电的日光灯，激光光源等等。按光源发射的光波的波长或频率来分类，可分为单色光源和复色光源；按发射光的相干性来分类，可分为非相干光源和相干光源，前者如日光灯、白炽灯、钠光灯、汞灯等，后者如激光光源。

我们知道要使两列（或多列）波在相遇区域内产生干涉现象必须要满足如下三个条件：（1）波源的振动频率相同；（2）波源的振动方向相同；（3）波源的振动相位差恒定。这三个条件合起来成为相干条件，缺一不可。或者说，只要其中任意一个条件不满足，就不可能产生干涉现象。我们将能够发生干涉现象的两列（或多列）波称为**相干波**（coherent waves），相应的波源称为**相干波源**；将不满足干涉条件或不能发生干涉现象的两列（或多列）波，称为**非相干波**（non-coherent waves）。

普通光源不满足相干条件，发出的光波是非相干波，这是因为普通光源内大量分子或原子的发光都是由自发辐射产生的。根据近代物理理论，在光源内有大量的分子或原子，这些分子或原子的能量只能取一些确定的、不连续的、分立的数值，这些分立的不连续的能量值称为**能级**。能量最低的能级称为基态，其它能级统称为激发态。原子处于基态时其状态是稳定的，除非受到外界的激发（注入能量）。而处于激发态的原子是不稳定的，很快就会自发地跃迁回基态或其它能级更低的激发态，在此过

程中要向外辐射出频率为 $\nu = \frac{E_H - E_L}{h}$ 的电磁波（光波），如

图 17.1 所示。这种跃迁的持续时间极为短暂，约为 $10^{-10}\text{s} - 10^{-8}\text{s}$ ，这也是单个原子每次发光的持续时间，所

以原子的每次自发辐射只能产生一个长度很短的波列，如图 17.2 所示。例如，在低温下，元素 ^{86}Kr 发生气体放电时所发出橙红色的波列长度仅约 0.77m ，其它普通光源发出的波列长度还要短得多。此外，由于普通光源中各原子的自发辐射完全是随机的，即处于同一激发态上的不同原子在哪一时刻开始辐射（即初相位）是随机的，它们各自向哪个低能级跃迁（即辐射频率）是随机的，所辐射的电磁波的传播方向以及电磁波中电场强度

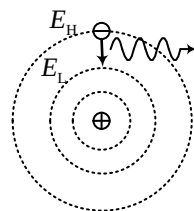


图17.1 原子从高能级向低能级跃迁时的自发辐射

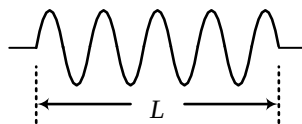


图17.2 光波波列

的振动方向等也都是随机的。甚至是同一个原子在前后两次自发辐射中光波的各项指标都是随机的，也不满足相干条件。因此普通光源中任意两个发光点发出的光波都是不相干的。这就是为什么人们在日常生活中很少看到光的干涉现象的原因。

17.1.3 相干光的获得方法

既然普通光源中任意两个发光点发出的光波都是不相干的，那么，我们如何才能获得相干光呢？

从普通光源中获得相干光的主要思路就是先将同一个点光源发出的光波（确切地说是同一个光波列）设法一分为二，然后再使这两部分相遇叠加，由于这两部分本来就属于同一个波列，它们的振动频率、振动方向都相同，而相遇时的振动相位差取决于它们经历的路程之差，因而满足相干条件，是相干光。通常将同一个光波列分成两部分的办法有两种。一种称为**分波阵面法**（division of wavefront method），就是在一个点光源发出的波阵面上取出两个很小的面元，根据上面的分析及惠更斯原理可知，这两个小面元就是两个满足相干条件的两个子光源，典型的例子就是杨氏双缝干涉实验中的两个狭缝。另一种称为**分振幅法**（division of amplitude method），就是当光投射到两种透明介质的分界面上时，利用反射和折射将光波分成两部分或若干份，由于这几部分光波都来自于同一个波列，所以也满足相干条件，例如薄膜干涉、迈克耳孙干涉仪等就是利用了这种方法。

17.1.4 光波的相干叠加与非相干叠加

微视频17.1 光干涉
的理论基础

光波的叠加也遵从波的叠加原理。当两列光波在空间某点相遇时，该点的光矢量是各光波单独在该点引起的光振动的矢量和。

设两列光波来自于两个独立的单色点光源 S_1 、 S_2 ，具有相同的振动频率和振动方向，如图 17.3 所示。两光源 S_1 、 S_2 处的光振动方程分别为

$$E_1(t) = E_{m1} \cos[\omega t + \varphi_{10}(t)] \quad (17.6)$$

$$E_2(t) = E_{m2} \cos[\omega t + \varphi_{20}(t)] \quad (17.7)$$

其中 E_{m1} ， E_{m2} 分别是两列光波在光源 S_1 、 S_2 处光振动

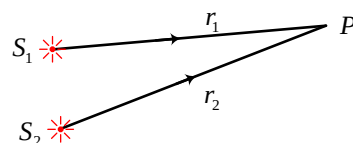


图17.3 两个光振动的叠加

的振幅； φ_{10} ， φ_{20} 分别是两光源 S_1 、 S_2 处光振动的初相位， ω 是圆频率。

假设这两个点光源发出的光振动相遇于 P 点， $S_1P = r_1$ ， $S_2P = r_2$ ，则它们在 P 点激发的光振动分别为

$$E_{1P}(r_1, t) = E_{10} \cos\left(\omega t + \varphi_{10}(t) - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \quad (17.8)$$

$$E_{2P}(r_2, t) = E_{20} \cos\left(\omega t + \varphi_{20}(t) - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \quad (17.9)$$

其中 $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ 是单色光的波长； E_{10} 和 E_{20} 分别是两列光波从波源 S_1 、 S_2 处各自传播到 P 处的光振动的振幅，根据波的叠加原理， P 点总的光振动为

$$E_P(t) = E_{1P}(r_1, t) + E_{2P}(r_2, t) = E_{P0} \cos(\omega t + \varphi_P) \quad (17.10)$$

式中

$$E_{P0} = \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \Delta\varphi_P} \quad (17.11)$$

$$\Delta\varphi_P = \varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (17.12)$$

$\Delta\varphi_P$ 是两列波在 P 处产生的两个光振动的相位差。虽然 P 处的（相对）光强为 $I = E_{P0}^2$ ，但当我们用眼睛看或用照相的办法来记录时，都需要较长的一段时间 τ （ $\tau \gg 10^{-8}\text{s}$ ），所以，（相对）光强实际上是在 τ 时间内的一个平均值，即

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \Delta\varphi_P) dt \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \Delta\varphi_P dt \end{aligned} \quad (17.13)$$

其中 $I_1 = E_{10}^2$ ， $I_2 = E_{20}^2$ 分别为两列光波在 P 点独立存在时的光强，它们是与时间无关的常数。上式右边的第三项取决于 $\Delta\varphi_P$ ，称为干涉项。由式（17.12）可以看出，当两个光源和 P 点位置确定以后， $\Delta\varphi_P$ 与 $(r_2 - r_1)$ 和 $[\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)]$ 都有关系。下面就两种典型情况作具体讨论。

1. 非相干叠加

若 S_1 、 S_2 是两个独立的光源，则它们之间的初相位之差 $[\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t)]$ 是随时间而变的， $\cos \Delta\varphi_p$ 在 $[-1, +1]$ 之间随机取值，于是在足够长的观测时间 τ 内， $\cos \Delta\varphi_p$ 的时间平均值一定是零，即

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \Delta\varphi_p dt = 0 \quad (17.14)$$

于是，由式 (17.13) 可知， P 点的光强为

$$I = I_1 + I_2 \quad (17.15)$$

即交叠区域中任一点的总光强都等于各列光波在该点的光强之和，这称为**非相干叠加**。

2. 相干叠加

若 S_1 、 S_2 是两个相干光源，即 $\varphi_{20}(t) - \varphi_{10}(t) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ 与时间 t 无关，则 $\cos \Delta\varphi_p$ 在观察时间内也与时间 t 无关，即

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos \Delta\varphi_p dt = \cos \Delta\varphi_p$$

式中

$$\Delta\varphi_p = \varphi_{20} - \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (17.16)$$

由此可得 P 点的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi_p = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \Delta\varphi_p \quad (17.17)$$

上式表明，在叠加区域内有些点光强始终加强，有些点光强始终减弱，即各点光强分布不随时间变化，这称为**相干叠加**。

当 $\Delta\varphi_p = \pm 2k\pi$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ 时

$$E_{p0} = E_{\max} = E_{10} + E_{20}, \quad I = I_{\max} = (E_{10} + E_{20})^2 \quad (17.18)$$

这称为两列光波在 P 点满足**干涉加强**（或**相长干涉**）(constructive interference) 条件， P 点为第 k 级明条纹中心。

当 $\Delta\varphi_p = \pm(2k+1)\pi$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ 时

$$E_{p0} = E_{\min} = |E_{10} - E_{20}|, \quad I = I_{\min} = |E_{10} - E_{20}|^2 \quad (17.19)$$

这称为两列光波在 P 点满足干涉减弱（或相消干涉）（destructive interference）条件， P 点为暗条纹中心。

特别是当 $E_{10} = E_{20} = E_0$ 时， $I_{\max} = 4E_0^2 = 4I_0$ ， $I_{\min} = 0$ 。

3. 干涉条纹的对比度

在研究干涉现象时，还必须考虑干涉条纹的清晰程度，即明暗条纹的对比度，也称为条纹的可见度。干涉条纹的对比度（contrast） η ，定义为

$$\eta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (17.20)$$

对比度的取值范围 $0 \leq \eta \leq 1$ ，其中 $\eta = 0$ 对应于非相干叠加情形； $\eta = 1$ 对应于干涉效果最好、干涉条纹明暗对比度最强的相干叠加情形。因此，要获得清晰的干涉图案，除了两列光波需满足振动方向相同、频率相同、相位差恒定这三个必要的干涉条件之外，还要满足以下两个补充条件：

（1）参与干涉的两列光波的振幅不能相差太大。

（2）场点 P 到两光源 S_1 、 S_2 的距离之差 $r_2 - r_1$ 不能太大，不能超过一个光源的最大相干长度 L_m （参见 17.5.2 光的时间相干性）。

§ 17.2 分波阵面法产生的光的干涉

17.2.1 杨氏双缝干涉实验

英国人托马斯·杨设计的双缝干涉装置是典型的分波阵面法干涉装置。运用这种简单可行的干涉装置，托马斯·杨成功实现了光的干涉，首次证实了光的波动性，并测量了单色光源的波长。

1、实验装置及干涉图样

微视频17.2 双缝干涉的光程差及明暗纹条件

图 17.4（a）是这种双缝干涉装置的示意图。一束单色平行光照射到狭缝 S 上，狭缝 S 就相当于一个线状光源，在它的后面对称地放置两条与之平行的、相距为 d （ d 很小）的狭缝 S_1 与 S_2 ；在双缝 S_1 与 S_2 之后较远的地方放置一个与双缝所在平面平行的观测屏。

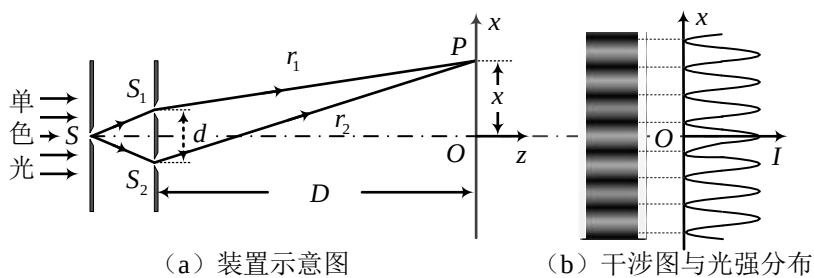


图17.4 杨氏双缝干涉

由于 S_1 、 S_2 两个狭缝正好位于线光源（单缝 S ）所发射的柱面光波的同一个波阵面上，按照惠更斯原理，这两个狭缝相当于两个频率相同，初相位相同，振动方向相同的子波源，因而是相干光源。于是，在垂直于纸面的观测屏上可以观测到一组明暗相间的干涉条纹，如图 17.4 (b) 所示，图中的曲线为沿 x 方向的光强分布曲线。由图可见，杨氏双缝干涉条纹的形状是一组明暗相间的、等间距的直线条纹，条纹的走向与双缝的取向平行。

2、明暗条纹的位置

图 17.4 (a) 中，观测屏上任一点 P 到坐标原点 O 的距离为 x ，设 $PS_1 = r_1$ ， $PS_2 = r_2$ ，并假设 $SS_1 = SS_2$ ，这相当于在式 (17.16) 中取 $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ 。故从双缝 S_1 、 S_2 发出的光波传播到 P 点时的波程差为

$$\delta = r_2 - r_1 \quad (17.21)$$

由图中的几何关系可知

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$$

由上面两式可得

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2dx \quad (17.22)$$

在一般的干涉实验中，总是要求满足远场干涉条件，即 $D \gg d$ ，所以

$$r_2 + r_1 \approx 2D \quad (17.23)$$

由此可得

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{d}{D}x \quad (17.24)$$

再将式 (17.24) 以及 $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ 代入式 (17.16), 并利用干涉加强与减弱条件, 可得**各级明条纹中心的位置条件**为

$$\delta = \frac{d}{D}x = \pm k\lambda \quad (17.25a)$$

即

$$x_k = \pm k \frac{D}{d} \lambda, \text{ 其中: } k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.25b)$$

$k = 0$ 的明纹常称为中央明纹或零级明纹。

各级暗条纹中心的位置条件为

$$\delta = \frac{d}{D}x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (17.26a)$$

即

$$x_k = \pm (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}, \text{ 其中: } k = 0, 1, 2, \dots \quad (17.26b)$$

从式 (17.25) 或式 (17.26) 可知, 相邻两明条纹 (或暗条纹) 之间的距离 Δx 为:

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{d} \lambda \quad (17.27)$$

式 (17.27) 表明: (1) 双缝干涉的条纹间距 Δx 与条纹的级次 k 无关, 干涉条纹是等间距排列的; (2) 条纹间距 Δx 与入射光的波长 λ 成正比、与双缝到观察屏的距离 D 成正比, 与双缝的间距 d 成反比。(3) 由于条纹间距 Δx 与入射光的波长 λ 成正比, 如果用白光 (复色光) 照射, 则在观测屏上可出现彩色的线状条纹, 以 O 点为中心, 沿 x 轴两个相反的方向, 同一级明纹由外向内对称地分布着红、橙、黄、绿、青、蓝、紫彩色条纹。这就是杨氏双缝干涉条纹的分布规律。

从式 (17.27) 可知, 虽然光的波长 λ 短至微米级, 人眼无法分辨如此微小的空间尺寸, 但由于 $\frac{D}{d} \gg 1$, 使 Δx 达到人眼可以分辨的尺寸 (毫米级以上)。历史上, 托马斯·杨正是利用双缝干涉实验, 通过测量干涉条纹的间距 Δx , 从而求出未知单色光的波长 λ 。

例 17.1 在杨氏双缝干涉实验中, 若入射光的波长 $\lambda = 560 \text{ nm}$, 双缝间隔

$d = 0.200\text{mm}$ ，双缝到观察屏的距离 $D = 160\text{cm}$ 。

(1) 试求观测屏上相邻两个明条纹之间的间距 Δx ；

(2) 如果用另一未知波长的单色光源在此装置上进行双缝干涉，测得相邻两个明条纹的间距 $\Delta x' = 4.80\text{mm}$ ，试求未知单色光的波长。

解：(1) 由式 (17.27) 可知，观测屏上相邻两亮条纹的间隔为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda = \frac{1.60\text{m}}{0.200 \times 10^{-3}\text{m}} \times 560 \times 10^{-9}\text{m} = 4.48 \times 10^{-3}\text{m}$$

(2) 此单色光的波长 λ' 为，则

$$\lambda' = \frac{d}{D} \Delta x' = \frac{0.200\text{m} \times 10^{-3}\text{m}}{1.60\text{m}} \times 4.80 \times 10^{-3}\text{m} = 6.00 \times 10^{-7}\text{m}$$

17.2.2 洛埃镜实验

杨氏双缝干涉实验成功之后，人们又成功地设计出其它几种简单、实用的分波阵面法干涉实验装置，例如洛埃镜干涉装置、菲涅尔双面镜和菲涅尔双棱镜干涉装置。下面将对这几个实验作简单介绍，以进一步加深对分波阵面法干涉的理解。

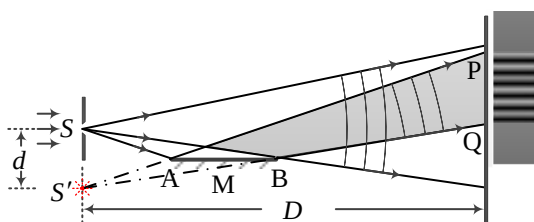


图17.5 劳埃镜实验装置 光路图及干涉图

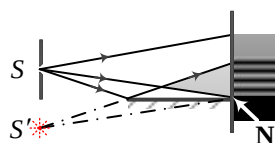


图17.6 半波损失

洛埃 (H. Lloyd) 设计的干涉装置构思巧妙，它是一种等效的杨氏双缝干涉结构，也是一种典型的分波阵面法双光束干涉结构，图 17.5 是这种干涉装置的示意图。图中 S 是垂直于纸面、沿水平放置的单缝线光源，由单色平行光垂直照射； AB 是垂直于纸面沿水平放置的平面反射镜，观察屏与平面反射镜 AB 相互垂直。从线光源 S 射出的光线一部分直接照射到观察屏上，另一部分以接近 90° 的入射角掠射到平面镜 AB 上，然后被反射到观察屏的 PQ 区域。经平面镜反射到 PQ 区域的光波就好像是从虚光源 S' （它是线光源 S 在平面镜中的像）发出的。由于这两束光来自于线光源上同一个发光点发出的同一个波列上，因此线光源 S 和虚光源 S' 构成了一对等效的相干线光源，在两列波的相遇区域

(PQ 之间), 就会出现干涉条纹。洛埃镜实验的干涉图与杨氏双缝干涉图几乎一样, 都是取向与狭缝平行的、等距的直线条纹, 条纹间距仍然由式 (17.27) 给出, 即 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$, 式中 d 是两个等效缝光源 S 和 S' 之间的距离, D 是等效双缝所在平面到观察屏之间的距离。

洛埃镜实验除了再次支持光的波动学说外, 更重要的贡献是从实验上证明了当光从光密介质上反射时会发生**相位突变** (或**半波损失**)。实验发现, 将观察屏逐渐靠近平面镜时, 屏幕上明暗条纹位置会发生变化; 当观察屏与平面镜相接时, 在接触点 N , 两束光波因传播路径引起的波程差为零, 所以 N 应是明条纹, 但实验结果却为暗条纹, 如图 17.6 所示。这表明两束光在 N 点引起的光振动相位相反, 满足相消干涉条件。究其原因, 一定是有一个光振动在 N 点发生了相位 π 的突变。因相位突变不可能无故产生, 所以只能是反射光在反射时产生了相位 π 的突变。相位 π 的突变相当于反射光在反射时损失了半个波长的波程, 故又称为**半波损失**。

17.2.3 菲涅尔双面镜实验

菲涅尔双面镜实验也属于分波阵面法干涉实验, 是杨氏双缝结构的另一种等效的变异装置。

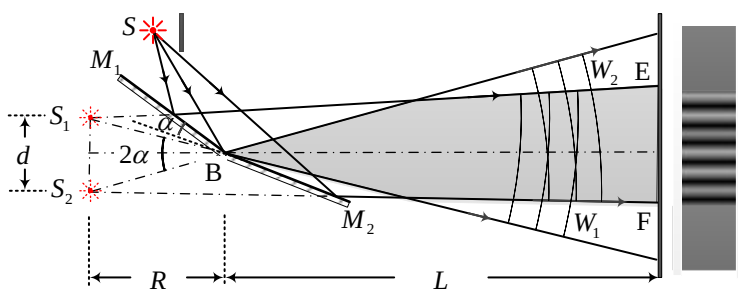


图17.7 菲涅尔双面镜实验装置 光路图及干涉图

如图 17.7 所示, **菲涅尔双面镜**装置由两个平面反射镜 M_1 、 M_2 拼接而成, 两个平面镜之间有一个很小的夹角 α , 单色线光源 S 的取向与两平面镜的交棱 B 平行, 线光源 S 发出的柱面光波射到两个平面镜 M_1 、 M_2 上, 被反射后形成两束光波 W_1 和 W_2 , 由于 W_1 和 W_2 来自于线光源 S 上同一个发光点发出的同一个波列, 所以满足相干条件, 在它们的相遇

区域内可以产生干涉现象，在观察屏上的 EF 内出现干涉条纹。由平面镜成像原理，不难看出两束相干光 W_1 和 W_2 可以看成是分别从 S 在平面镜 M_1 、 M_2 中的像 S_1 和 S_2 发出的。这 S_1 和 S_2 就是两个等效的“缝光源”——**虚光源**，因此观察屏上干涉条纹的分布规律与杨氏双缝干涉的条纹分布一致，条纹间距仍然可以用 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ 来计算，式中 d 是两个虚光源 S_1 和 S_2 之间的距离， D 是两个虚光源到观察屏之间的距离。若两个平面镜的交棱 B 到线光源 S 和观察屏的距离分别为 R 、 L ，则： $D \approx R + L$ ， $d \approx 2\alpha R$ 。

17.2.4 菲涅尔双棱镜实验

菲涅尔双棱镜干涉装置如图 17.8 所示，它是由两个顶角 δ 很小的劈形棱镜接合而成，实际上是一个横截面为等腰三角形的大顶角 ($>170^\circ$) 柱面棱镜。

在双棱镜的棱脊前放置一个取向与棱脊平行的缝光源 S ，它发出的

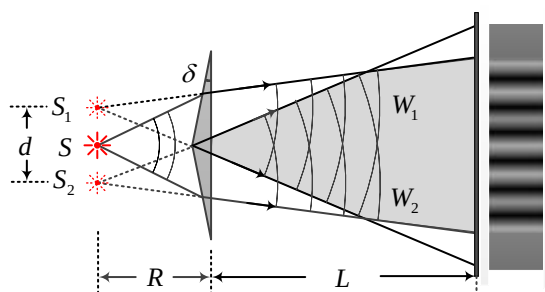


图17.8 菲涅尔双棱镜实验装置 光路图及干涉图

柱面光波被上下两个劈尖形棱镜分割并折射后，形成两束满足相干条件的折射光波 W_1 和 W_2 。不难看出，这两束光波等效于从虚光源 S_1 、 S_2 中发出，这两个虚光源 S_1 、 S_2 也相当于杨氏双缝干涉实验中的双缝光源。因而菲涅尔双棱镜也是一种与杨氏双缝干涉等效的干涉装置。干涉条纹的间距仍然可以用 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ 来计算。如果缝光源 S 到双棱镜的距离为 R ，双棱镜到观察屏的距离为 L ，棱镜的折射率为 n ，顶角为 δ ，则： $D = R + L$ ， $d \approx 2(n-1)\delta R$ 。

17.2.5 光程 光程差与相位差

微视频17.3 光程、光程差和相位差

在分析与讨论两束相干光在相遇区域内的干涉情况时，离不开计算与比较两束光在相遇点的相位和相位差。由于光在不同的透明介质中传播时，其振动频率不变，但速度改变，因此，同一束光波在不同的介质中传播具有不同的波长。通常，人们说可见光的

波长范围是 400nm—760nm，指的是可见光在真空中传播时的波长范围。若以 λ 和 λ' 分别表示同一单色光波在真空中和折射率为 n 的透明介质中的波长，则

$$n = \frac{c}{u} = \frac{c/v}{u/v} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad \text{或} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{n} \quad (17.28)$$

如果有一列波长为 λ 的光波在折射率为 n 的介质中从 A 点传播到 B 点，经过的几何路程为 l ，如图 (17.9) 所示。由波动理论可知，该光波在 A、B 两点的振动相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 2\pi \frac{l}{\lambda'} \quad (17.29)$$

通常，人们只知道光在真空中的波长，直接用上式计算相位差显然不方便，但若将式 (17.28) 代入式 (17.29)，可得

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = 2\pi \frac{nl}{\lambda} = 2\pi \frac{L}{\lambda} \quad (17.30)$$

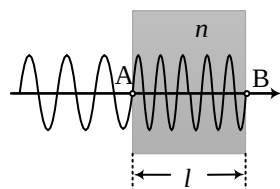


图17.9 光程 $L = nl$

式中 $L = nl$ 称为**光程** (optical path)，它是光在介质中传播的几何路径 l 与该介质的折射率 n 的乘积。式 (17.30) 表明，引入光程概念以后，如果光在介质中传播，在计算波线上任意两点的相位差时，可以直接用光在真空中的波长来计算，这就是引入光程概念的优点。

假设从点光源 S 发出的光波，经过两个不同的路径 SAP 和 SBP，在 SAP 中有一段是折射率为 n 的透明介质，其余为空气，如图 17.10 所示，则这两束光的**光程差** (optical path difference) 为

$$\delta = L_{\text{SAP}} - L_{\text{SBP}} = [l_1 + l_3 + (n-1)l] - (l_2 + l_4)$$

于是，两束光在 P 点产生的光振动的相位差为

$$\Delta\varphi_P = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (17.40)$$

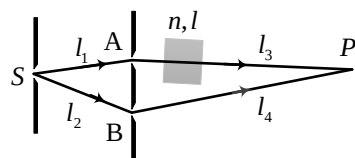


图17.10 光程差

式 (17.40) 就是光程差与相位差之间的关系。于是 P 点满足相长干涉和相消干涉的条件可分别表示为

$$\delta = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{相长干涉} \quad (17.41)$$

$$\delta = \pm (2k+1)\lambda/2 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{相消干涉} \quad (17.42)$$

式中 λ 是光在真空中的波长。上两式表明，两列相干光在 P 点的干涉情况取决于两列光

传播到 P 点的光程差。

17.2.6 理想透镜不产生附加光程差

在光的干涉或衍射实验中，常常需要用透镜将光线汇聚在一个给定的平面上，也可以用眼睛直接观察，这时眼睛内晶状体的作用类似于一个透镜，将相干光束会聚于视网膜上并发生干涉，在视网膜上呈现干涉或衍射图样。那么，透镜的介入是否会改变相干光束的光程差，从而改变干涉或衍射条纹的分布规律呢？

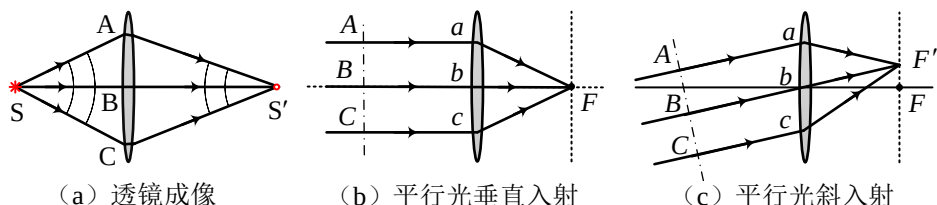


图17.11 透镜不产生附加的光程差

根据透镜的成像规律，我们知道从物点 S 发出的光线，经透镜的不同部位折射后在像平面上会聚成一个明亮的实像 S' ，如图 17.11 (a) 所示。从波动光学的角度来看，像点之所以是亮的，是满足相长干涉条件的结果，即各条光线在像点处会聚时振动相位差为零。这意味着从物点到像点，各条光线之间的光程差也为零，即透镜成像时不引起附加的光程差。这个结论我们也可以用光线追迹法去理解，考察通过透镜中心和边缘的两条光线 SAS' 和 SBS' ，虽然前者的几何路径比后者长，但前者在透镜中通过的距离却比后者小，而透镜的折射率大于 1，如果折算成光程，则两者的总光程相等。

此外，平行光通过透镜后在焦平面上会聚成一个明亮的点，如图 17.11 (b)、(c) 所示，这是由于平行光波阵面上各点（如图中 A 、 B 、 C ）的振动相位相同，而到达会聚点 F 后它们的振动相位仍然相同，满足相长干涉条件，所以形成亮点。这同样表明 AaF 、 BbF 、 CcF 等各条光线的光程完全相同。

综上所述，不论用透镜成像，还是会聚平行光，使用透镜都不会引起附加的光程差。

例17.2 如图17.12所示，当用一厚度为 $h = 6.64 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 、折射率未知的云母片覆盖在杨氏双缝干涉装置的一条缝上时，屏上的零级明条纹移到了原来（未覆盖云母片时）第7级明条纹所在的位置，已知入射光的波长 λ 为 550 nm 。试求云母片的折射率。

解： 设云母片的折射率为 n ，空气折射率为 $n_0 = 1.00$ 。未覆盖云母片时第 7 级明条

纹在屏上 P 点，则从双缝 A、B 发出的光到 P 点的光程差为

$$\delta_0 = n_0 r_2 - n_0 r_1 = 7\lambda \quad (1)$$

覆盖云母片后， P 点变成零级明条纹，所以从双缝发出的光到 P 点的光程差为

$$\delta = n_0 r_2 - [n_0 r_1 + (n - n_0)h] = 0 \quad (2)$$

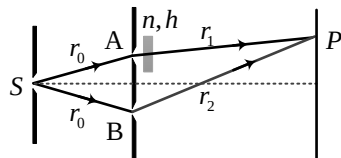


图17.12 例题17.2图

由①、②两式可得

$$(n - n_0)h = n_0(r_2 - r_1) = 7\lambda$$

由此可得云母片的折射率为

$$n = n_0 + \frac{7\lambda}{h} = 1.00 + \frac{7 \times 550 \times 10^{-9} \text{ m}}{6.64 \times 10^{-6} \text{ m}} = 1.58$$

在本题中，如果已知云母片折射率 n 和厚度 h ，将云母片插进一条光路后，通过测出移动的条纹数 ΔN ，也可以反过来测算出入射光的波长，即

$$\lambda = \frac{(n - n_0)h}{\Delta N}$$

17.3 分振幅法产生的光的干涉

17.3.1 薄膜干涉概述

泼洒在地面的油膜，飘荡在空中的肥皂泡，在阳光下闪耀出五彩斑斓；若将两块叠放在一起的平板玻璃一端压紧，也可在日光照射下看到彩色条纹；如此种种，不一而足。它们的共同之处，就是同属分振幅法产生的光的干涉；相比于前面所述的分波阵面法干涉技术，它是产生相干光束和干涉现象的一种全新的方法。

如图 17.13 所示，假设单色光源 S 发出的一束光以一定的入射角 i 照射到透明薄膜上，光束在薄膜的上下表面都会不断地发生反射与折射，相继形成一系列反射线和透射线。因为光的强度（平均能流）正比于光矢量振幅的平方，因此光线的每一次反射或折射，都伴随一次振幅和能量的分割——振幅和能流一部分透射，一部分反

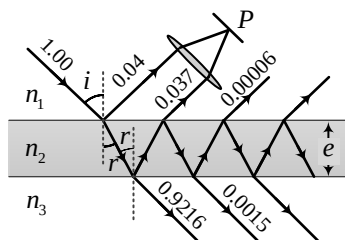


图17.13 平行膜的干涉

射，因此这种产生相干光的方式，称为**分振幅法**获得相干光。**薄膜干涉**（thin film interference）是分振幅法产生的光干涉中最典型的一种，下一节介绍的迈克耳孙干涉仪是另一种典型的分振幅法产生的光干涉。

如果透明薄膜的上下两个表面是两个互相平行的平面，这样的薄膜称为**平行平面薄膜**。在平行平面薄膜上产生的所有反射线和折射线都是互相平行的，这些相干的平行光束本来应该在无穷远处相遇并干涉，但通常用凸透镜使它们会聚于透镜的焦平面上。

在普通的薄膜表面，其反射率一般很低，通常只有 4% 左右，即单次反射光的强度约为入射光强度的 4%。在图 17.13 中，还给出了各条反射线和折射线的相对强度（假设入射线的强度为 1.00）。不难看出，只有前两束反射光的振幅比较接近，其余各反射光的振幅都很小，可以忽略不计，所以在薄膜干涉中，通常只考虑前两束光的干涉。而在透射光中，前两束相干光的强度差别很大，所以在透射光的干涉中，干涉图样的对比度（可见度）较小。

下面来分析薄膜干涉中光程差的计算以及干涉加强和干涉减弱的条件。

1. 反射光的干涉

如图 17.14 所示，设入射光线以入射角 i 投射到折射率为 n_2 、厚度为 e 的平行平面薄膜上，薄膜上方和下方介质的折射率分别为 n_1 和 n_3 。反射光线 1 和 2 经透镜会聚后在 P 点相遇，并产生干涉（也可以直接用眼睛观察，使光线 1、2 会聚于视网膜上）。显然两束光在 P 点干涉的结果取决于两束光到达 P 点的光程差。

首先考察两束光因传播路径不同产生的传播光程差，记为 δ_0 。过 C 点作光线 1 的垂线，垂足为 D。由于透镜不产生附加的光程差，所以传播光程差为

$$\delta_0 = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AD} \quad (17.43)$$

由几何关系，可知

$$\overline{AB} = \frac{e}{\cos \gamma}$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin i = 2e \tan \gamma \sin i$$

由折射定律，有

$$n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$$

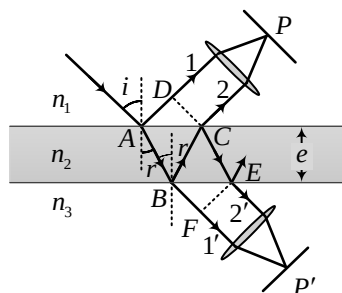


图17.14 薄膜干涉—光程差的计算

将此三式代入式 (17.43)，可得

$$\delta_0 = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \quad (17.44a)$$

或

$$\delta_0 = 2n_2 e \cos \gamma \quad (17.44b)$$

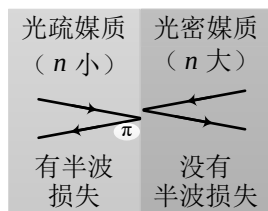


图17.15 半波损失

其次还要考虑因反射引起的附加光程差 $\delta'_{\text{反}}$ 。洛埃镜干涉

实验的结果表明，光波与机械波一样，在介质表面反射时可能会产生半波损失。当光的入射角 i 接近于 0° 或 90° 时，如果光从光疏媒质向光密媒质入射，则反射光在反射时有半波损失；如果光从光密媒质向光疏媒质入射，则没有半波损失，其示意图如图 17.15 所示。值得注意：半波损失只可能出现在反射光中，在透射光中没有半波损失。由于两束光在 A 、 B 两点分别有一次反射过程，如果这两次反射过程都有、或都没有半波损失，则半波损失的效果互相抵消，附加光程差 $\delta'_{\text{反}} = 0$ ，这称为反射条件相同；如果其中一次反射有半波损失，另一次没有，则附加光程差 $\delta'_{\text{反}} = \frac{\lambda}{2}$ ，这称为反射条件不同。

综上所述，两束反射光到达 P 点时的总光程差 $\delta_{\text{反}}$ 应为上述两个光程差的总和，即

$$\begin{aligned} \delta_{\text{反}} &= \delta_0 + \delta'_{\text{反}} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'_{\text{反}} \\ &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \begin{cases} 0 & \text{当: } n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3 \\ \lambda/2 & \text{当: } n_1 < n_2, n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2, n_2 < n_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (17.45)$$

于是在反射光干涉中， P 点为干涉明条纹、或暗条纹中心的条件是

$$\begin{aligned} \delta_{\text{反}} &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'_{\text{反}} \\ &= \begin{cases} \pm k\lambda & k = 0, 1, 2, \dots \quad P \text{ 为第 } k \text{ 级明纹中心} \\ \pm (2k+1)\lambda/2 & k = 0, 1, 2, \dots \quad P \text{ 为暗纹中心} \end{cases} \end{aligned}$$

2. 透射光的干涉

如图 17.14 所示，从薄膜上透射出来的两束光 $1'$ 和 $2'$ 同样满足相干条件，它们在 P' 点相遇时的干涉情况也取决于它们到达 P' 点时的总光程差 $\delta_{\text{透}}$ 。不难理解，这个总光程差同样由两部分组成，一部分是传播路径不同产生的传播光程差 δ_0 ，另一个是因反射时的

半波损失引起的附加光程差 $\delta'_{\text{透}}$ 。利用图中的几何关系和折射定律，可以证明（请读者自己证明）

$$\delta_0 = n_2(\overline{BC} + \overline{CE}) - n_3 \overline{BF} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

且（请读者分析为什么？）

$$\delta'_{\text{透}} = \begin{cases} 0 & \text{当: } n_1 < n_2, n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2, n_2 < n_3 \\ \lambda/2 & \text{当: } n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3 \end{cases}$$

所以，透射光干涉中总光程差及明暗纹条件为

$$\begin{aligned} \delta_{\text{透}} &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'_{\text{透}} \\ &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \begin{cases} 0 & \text{当: } n_1 < n_2, n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2, n_2 < n_3 \\ \lambda/2 & \text{当: } n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3 \end{cases} \quad (17.46) \\ &= \begin{cases} \pm k\lambda & k = 0, 1, 2, \dots \quad P' \text{ 为第 } k \text{ 级明纹中心} \\ \pm(2k+1)\lambda/2 & k = 0, 1, 2, \dots \quad P' \text{ 为暗纹中心} \end{cases} \end{aligned}$$

比较式 (17.45) 和式 (17.46)，不难看出，反射光干涉和透射光干涉中附加光程差的取值恰好相反，这是读者需特别注意的地方。对于同一个薄膜，如果反射光中两次反射条件不同，附加光程差取 $\lambda/2$ ，则透射光中两次反射的条件一定相同，附加光程差取 0，反之亦然。只有这样，才能在反射和透射时满足能量守恒定律。因为入射光的光强一定等于反射光和透射光的光强之和，反射光干涉加强了，则透射光一定干涉减弱。

17.3.2 等倾干涉条纹

微视频17.5 等倾干涉条纹的吐级与吞级（演示）

由式 (17.45) 可知，对于一个给定的平行平面薄膜，由于薄膜的厚度 e 是一个定值，附加相位差 $\delta'_{\text{反}}$ 也是确定的，所以两束反射光 1、2 之间的总光程差只由入射角 i 确定，即

$$\delta_{\text{反}} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'_{\text{反}} \quad (17.47)$$

于是，凡是以相同倾角入射的光线，经过薄膜的上下表面反射后产生的相干光具有相同的光程差，在干涉图中处在同一个干涉条纹上，故这类干涉称为**等倾干涉** (equal inclination interference)。图 17.16 是等倾干涉装置的原理示意图和等倾干涉条纹的照片。

从单色面光源上任意一个发光点发出的一束光线照射到与薄膜成 45° 倾角的半反半透（平面）镜上，然后被半反半透镜反射到薄膜上。从薄膜上下表面反射的相干光被会

聚在凸透镜的焦平面上并产生干涉。不难理解，从光源上任意一个发光点发出的、在同一个圆锥面上的光线均以相同的倾角入射到薄膜上，并在透镜的焦平面上形成一个圆环形干涉条纹。由于一个发光点可以向各个方向发光，因此它发出的所有光线可以构成许多个圆锥面，从而可以形成一组明暗相间的圆环形干涉条纹，如图 17.16 (b) 中的照片所示。又面光源上不同的发光点发出的方向相同的平行光线都被透镜会聚到焦平面上的同一个点，如图 17.16 (b) 所示，因此面光源上不同的发光点发出的光波在透镜焦平面上形成的干涉条纹完全重叠，这种非相干叠加的结果就是使亮处更亮，暗处依然是暗的。所以，用扩展的面光源照射将会使干涉条纹更加明亮。

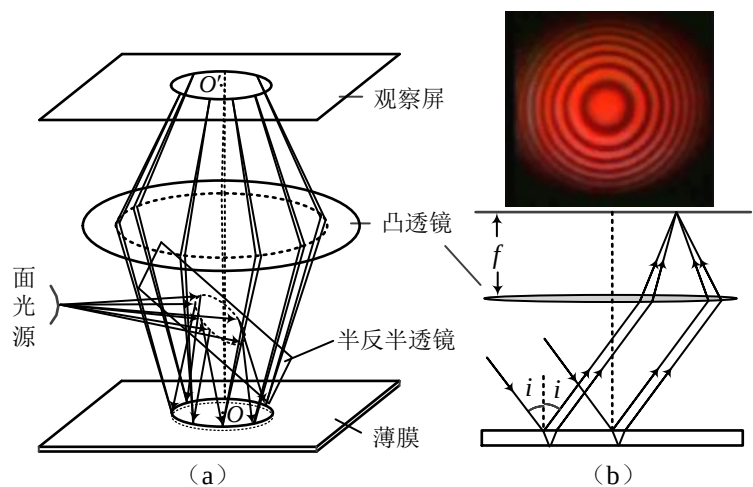


图17.16 等倾干涉的实验装置原理图和等倾干涉条纹

分析照片可以得出等倾干涉条纹的特点：圆环形干涉条纹内疏外密，条纹越靠近圆心 O' （焦点）级次越高。这是因为光线的入射角 i 越小，反射光的会聚点越靠近焦点；又由式 (17.47) 可知，入射角 i 越小，光程差就越大，对应的干涉条纹的级次就越高。所以圆心 O' 点的干涉条纹级次最高，由圆心沿径向往外，干涉条纹的级次依次降低。如果我们能够连续的改变薄膜的厚度，当厚度逐渐增加时，会发现条纹从中央冒出，并向外扩展，这称为“吐级”现象；厚度减小时，中央的条纹会逐个消失，这称为“吞级”现象。

17.3.3 增反膜与增透膜

微视频17.6 增透膜和增反膜

当光照射在两种介质的界面上时，总有一部分光能量因反射而损失了。在空气与玻

璃的界面上，当光垂直入射时，反射光的能量约占入射光能量的 4%。一个单透镜有两个表面，大约有 7~8% 的入射光能量因反射而损失掉。许多现代光学仪器（如高级照相机）的成像透镜通常是由多个透镜组成的组合透镜，因反射损失的光能量可高达入射光能量的 30%，甚至更多。同时，反射的杂散光还会严重影响镜头的成像质量。界面越多，损失的光能量就越多，杂散光也越多。为了减小因反射而损失的光能，通常会在透镜表面镀上一层光学薄膜，并使透射光满足相长干涉（反射光干涉相消）条件，从而提高光学器件的透射率，这样的光学薄膜称为**增透膜**（antireflection film）。

在增透膜技术中，一般可以在玻璃透镜表面镀一层氟化镁（ MgF_2 ）透明薄膜，其折射率为 $n_2 = 1.38$ ，而空气和玻璃的折射率分别为 $n_1 = 1.0$ 和 $n_3 = 1.5$ 。在垂直入射（ $i = 0$ ）条件下，由式（17.46）可知，透射光满足相长干涉的条件为

$$\delta_{\text{透}} = 2n_2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

从而可得增透膜的厚度为

$$e = \frac{(2k-1)\lambda}{4n_2} \quad (17.48)$$

由上式可知，增透膜的厚度与入射光的波长有关。对普通的光学仪器（如照相机）而言，通常选择对人眼最敏感的波长 $\lambda = 550\text{nm}$ 的黄绿光进行增透。若在式（17.48）中取 $k = 1$ ，可得该增透膜的最小厚度为 $e = \lambda/4n_2 = 99.6\text{nm}$ 。若用白光照射，由于黄绿光及其附近的光在反射光中消失了，而远离此波长的红光和紫光因不满足增透条件，仍有反射，所以高级相机的镜头表面在日光下看起来呈紫红色。

反过来，有些光学器件的表面则需要减少其透射率，以增加其反射光的强度。例如激光器中光学谐振腔的全反射镜其反射率几乎要达到 100%，输出端的反射率也要达到 98% 以上。这同样可以利用薄膜干涉技术来实现。能使反射加强的光学薄膜称为**增反膜**或**高反膜**（high reflection films）。制作高反膜的常用介质是折射

率为 $n = 2.35$ 的硫化锌（ ZnS ）。一般来说，单层增反膜的反射率只有约 25%。为了获得更高的反射率，往往采用多层膜技术，如图 17.17 所示，在玻璃表面交替镀上 ZnS 和 MgF_2

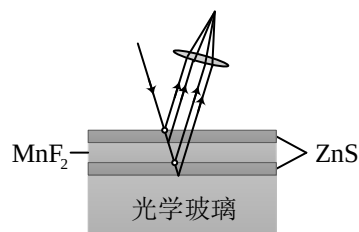


图17.17 多层增反膜

薄膜。由于在每一层 ZnS 薄膜的上表面反射时都有半波损失，所以当各层薄膜的厚度均为 $\lambda/4n$ 时（ n 是该层膜的折射率），任意相邻两条反射光之间都满足相长干涉条件。当膜层数达到 15 层以上时，可使某个特定波长的反射率接近 100%。由于这种膜对光的吸收很少，所以比镀银、镀铝反射镜的反射效果更好。

利用同样的技术，采用多层膜技术可以使某一特定的单色光能够透过，这就制成了实验室中常用的干涉滤光片。

例 17.3 厚度 $e = 625\text{nm}$ 、折射率 $n_2 = 1.40$ 的煤油膜平浮于水面上，如图所示，水的折射率 $n_3 = 1.33$ 。现用一束白光垂直照射，试求：

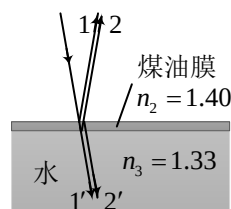


图17.18 例17.3图

- (1) 在反射光中，有哪些波长的光满足相长干涉条件？
- (2) 在透射光中，有哪些波长的光满足相长干涉条件？
- (3) 若使波长为 550nm 的光波在反射中满足相长干涉，该薄膜的最小厚度为多少？

解：（1）由于煤油的折射率比水和空气的都大，所以反射光 1、2 在煤油膜的上下表面反射时，反射条件不同（1 有半波损失，2 没有），因此有附加光程差 $\lambda/2$ ，所以反射光 1、2 相遇时的总光程差为

$$\delta_{\text{反}} = 2n_2e + \lambda/2$$

要使反射光满足相长干涉条件，则有

$$\delta_{\text{反}} = 2n_2e + \lambda/2 = k\lambda$$

由此可得

$$\lambda = \frac{4n_2e}{2k-1} = \frac{4 \times 1.40 \times 625}{2k-1} \text{nm} = \frac{3500}{2k-1} \text{nm} \quad \text{式中：} k=1, 2, 3, \dots$$

当 $k=2$ 时， $\lambda=1167\text{nm}$ （红外）

当 $k=3$ 时， $\lambda=700\text{nm}$ （红光）

当 $k=4$ 时， $\lambda=500\text{nm}$ （绿光）

当 $k=5$ 时， $\lambda=389\text{nm}$ （紫外）

又白光的波长范围为（ $400\text{nm} \sim 760\text{nm}$ ），所以白光中只有 700nm 的红光和 500nm 的绿光这两种光在反射中满足相长干涉（反射加强）条件。

(2) 再分析透射光1'、2'，由于 $n_1 < n_2 > n_3$ ，光线2'在薄膜内的两次反射都有半波损失（反射条件相同），故附加光程差为 0，因此两透射光相遇时的总光程差为 $\delta_{\text{透}} = 2n_2e$ ，要使透射光满足相长干涉条件，则有

$$\delta_{\text{透}} = 2n_2e = k\lambda$$

由此得

$$\lambda = \frac{2n_2e}{k} = \frac{1750}{k} \text{ nm} \quad \text{式中: } k=1,2,3,\dots$$

当 $k=2$ 时， $\lambda=875\text{nm}$ （红外）

当 $k=3$ 时， $\lambda=583\text{nm}$ （黄光）

当 $k=4$ 时， $\lambda=438\text{nm}$ （蓝光）

当 $k=5$ 时， $\lambda=350\text{nm}$ （紫外）

由此可知，在透射光中只有 583nm 的黄光和 438nm 的蓝光满足相长干涉（透射加强）条件。

(3) 由 (1) 可知，要使该薄膜上的反射光满足相长干涉条件，则必有

$$\delta_{\text{反}} = 2n_2e + \lambda/2 = k\lambda$$

所以当 $\lambda=550\text{nm}$ 时，该薄膜的可能厚度为

$$e = (2k-1) \frac{\lambda}{4n_2} = (2k-1) \frac{550}{4 \times 1.40} \text{ nm} = 98.2 \times (2k-1) \text{ nm}$$

取 $k=1$ ，可得薄膜的最小厚度为： $e_{\text{min}} = 98.2\text{nm}$ 。

17.3.4 等厚干涉

在很多实际情况中，薄膜的两个表面不是平行的，而是有一个微小的夹角 θ ，形成劈尖形薄膜。此时薄膜上下两个表面的两条反射光线 2 和 3 就不是平行光，两者或两者的延长线相交于薄膜表面附近，可以用眼睛直接观察它们的干涉情况，如图 17.19 所示。这种劈尖形的薄膜干涉，称为**劈尖干涉**（wedge interference）。

由于薄膜很薄（通常只有十几个微米），薄膜上下两个表

微视频17.7 劈尖干涉及其条纹特征

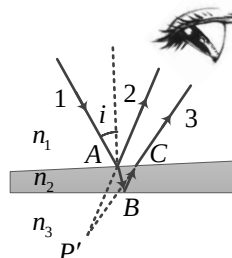


图17.19 劈尖干涉

面的两条反射光线 2 和 3 与薄膜上表面的交点 A、C 相距很近，可用 e 表示这两点间薄膜的平均厚度。可以证明，这两条反射光相遇时的总光程差仍然可用式 (17.45) 作近似计算，即

$$\begin{aligned}\delta_{\text{反}} &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'_{\text{反}} \\ &= 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \begin{cases} 0 & \text{当: } n_1 < n_2 < n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2 > n_3 \\ \lambda/2 & \text{当: } n_1 < n_2, n_2 > n_3 \text{ 或 } n_1 > n_2, n_2 < n_3 \end{cases} \quad (17.49)\end{aligned}$$

由于薄膜的厚度 e 不是常数，所以反射光的总光程差不仅与光的入射角 i 有关，还与厚度 e 有关。这里我们只讨论一种比较简单的特殊情况，即光线垂直入射 ($i = 0$) 的情况。不难看出，在垂直入射条件下，劈尖干涉的光程差计算公式和明暗纹条件为

$$\delta_{\text{反}} = 2n_2 e + \begin{cases} 0 & \text{(反射条件相同时)} \\ \lambda/2 & \text{(反射条件不同时)} \end{cases} = \begin{cases} k\lambda & \text{明纹中心} \\ (2k+1)\lambda/2 & \text{暗纹中心} \end{cases} \quad (17.49)$$

上式表明，在薄膜厚度相同的地方，两反射光的光程差相同，满足相同的干涉条件，会出现在同一个干涉条纹上。这种干涉条纹由薄膜的厚度决定的干涉统称为等厚干涉(equal thickness interference)。其中的每一个干涉条纹都相当于薄膜的一条等厚线（或等高线）。

从式 (17.49) 可以得出，相邻两个明条纹（或暗条纹）对应的薄膜的厚度差为

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n_2} = \frac{\lambda'}{2} \quad (17.50)$$

式中 $\lambda' = \frac{\lambda}{n_2}$ 是光在薄膜介质中的波长。这表明：在等厚干涉中相邻两个明条纹（或暗条纹）对应的薄膜的厚度差为光在薄膜介质中波长的一半。

在劈尖干涉中，由于薄膜的上下两个表面都是平面，所以干涉条纹的形状是一组平行等距、明暗相间的直线条纹，如图 17.20 所示。如果薄膜上下两个表面的夹角为 α ，则由图可知，相邻两个明条纹（或暗条纹）之间的距离为

$$\Delta l = \frac{\Delta e}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{2n_2 \sin \alpha} \quad (17.51)$$

式 (17.51) 表明：当劈尖的夹角 α 增大（或减小）时，条纹的间隔 Δl 就随之而减小（或增大）。

如果用白光照射，不同波长的光将在薄膜表面各自形

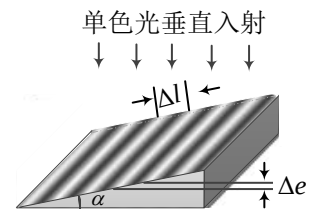


图17.20 劈尖干涉的条纹形状

成一套干涉图样。由于干涉条纹的间隔与波长有关，所以各色条纹彼此错开，在薄膜表面形成彩色条纹。例如在水面的油膜上，空气中的肥皂泡上，都可以看到这种彩色的干涉图样。

17.3.5 劈尖干涉的应用

1、用劈尖干涉测量微小长度

如图 17.21 所示，是劈尖干涉中一种常见的情形，两块平板玻璃片一端压紧，另一端用一根细丝或一块薄片隔开，于是在两块玻璃板之间就形成了一个劈尖形空气膜，称为空气劈尖。若用单色平行光垂直照射，也会呈现图 17.20 所示的干涉条纹。由于空气的折射率 $n_2=1$ ，上下玻璃的折射率 $n_1=n_3=1.5>n_2$ ，上下表面的两条反射光的反射条件不同，有附加光程差 $\lambda/2$ 。在两玻璃片的交棱处， $e=0$ ， $\delta_{\text{反}}=\lambda/2$ ，所以在交棱处出现暗条纹。如果测出了细丝到交棱的距离 L 和相邻两条纹之间的距离 Δl ，就可以求出细丝的直径或薄片的厚度

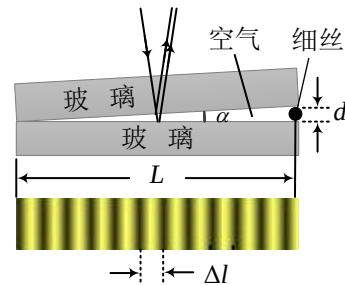


图17.21 空气劈尖测细丝的直径

$$d = L \tan \alpha \approx L \sin \alpha = L \frac{\lambda}{2\Delta l} \tag{17.52}$$

2、用劈尖干涉测量微小长度的变化量

在精密测量中，利用劈尖干涉技术还可测定微小长度的变化量。对于劈尖形空气薄膜，若光垂直入射，在保持楔角 α 不变的情况下逐渐改变空气膜的厚度，则整套干涉条纹将发生平移，同时保持条纹间距不变，这是由于当各处厚度同时增加 $\lambda/2$ 时，各处上下表面的两条反射光的光程差就同时增加 λ ，使得原来 k 级条纹的地方变成了 $k+1$ 级条纹的位置，即整套干涉条纹向较薄的方向移动了一个条纹间距。若在视场中固定一个观察点，测出经过该点的条纹数，就可算出空气膜厚度的

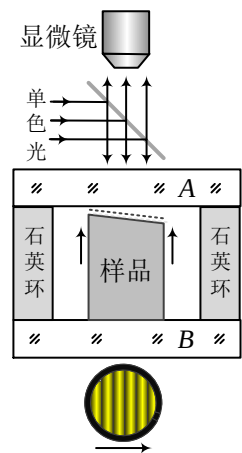


图17.22 膨胀干涉仪

改变量： $\Delta e = N \cdot \lambda / 2$ 。

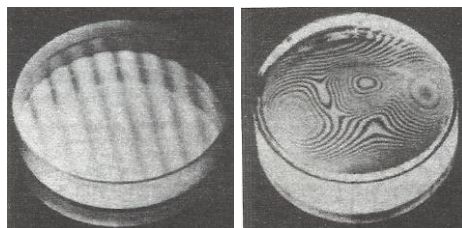
根据此原理制造的干涉膨胀仪如图 17.22 所示，在两块标准平板玻璃 A、B 之间是一个由石英制成的环，其热膨胀系数很小且为已知，环内放置待测样品，样品的上下表面都精密磨光，但不严格平行。于是，在样品的上表面和玻璃板 A 的下表面之间形成一个楔形空气层，用单色平行光自上而下垂直入射，就会产生等厚干涉条纹。

若样品的热膨胀系数比环的大，在整个系统的升温过程中，A 和样品之间空气层的厚度会逐渐减小，从显微镜中就会看到条纹随之移动。设样品温度从 T_0 升到 T 的过程中，干涉条纹移动了 N 个条纹，则空气层厚度的减小量为 $\Delta l = N \cdot \lambda / 2$ 。而此过程中环高度增加了 Δl_1 ，样品高度增加了 Δl_2 ，且有 $\Delta l_2 = \Delta l + \Delta l_1$ 。当环材料的参数已知时，可算出 Δl_1 ，再由样品的原高度 l_0 ，可得样品的热膨胀系数为

$$\gamma = \frac{\Delta l_2}{l_0 (T - T_0)} \quad (17.53)$$

3、用劈尖干涉检测表面平整度

此外，利用劈尖干涉，还可以检查工件表面的平整度。取一个光学表面的标准玻璃，叫做平晶。放在另一块待检测的玻璃表面，或金属磨光面上，观察干涉条纹是否为平行等距的直线条纹，就可判断待检测平面的平整度，如图 17.23 所示。用这种方法检测平整度，精度可达 $\lambda/4$ ，约为 $0.1\mu\text{m}$ 。



(a) 表面平整 (b) 表面不平整

图17.23 用劈尖干涉检测工件平整度

例 17.4 在制造半导体元件时，常常需要精确测定硅片上二氧化硅 (SiO_2) 薄膜的厚度，这是可以采用化学腐蚀的方法将二氧化硅薄膜变成劈尖形状，如图 17.24 所示，然后用波长 $\lambda = 589\text{nm}$ 的钠黄光垂直照射到二氧化硅劈尖形薄膜上。假设在显微镜中观察到从边缘 B 到 A 点总共有 6 条暗纹，且 A 点恰好是第六条暗纹中心。已知，硅的折射率为 $n_3 = 2.35$ ，二氧化硅薄膜的折射率为 $n_2 = 1.76$ ，试求：A 点处二氧化硅的厚度。

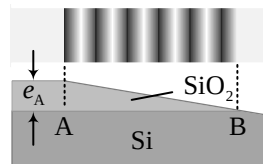


图17.24 例17.4图

暗纹，且 A 点恰好是第六条暗纹中心。已知，硅的折射率为 $n_3 = 2.35$ ，二氧化硅薄膜的折射率为 $n_2 = 1.76$ ，试求：A 点处二氧化硅的厚度。

解：由于 $n_1 < n_2 < n_3$ ，所以在反射光中，两条反射光的反射条件相同（都有半波损失），附加光程差为 0，所以在 A 点处的暗条纹应满足

$$\delta_{\text{反}} = 2n_2 e_A + 0 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad k=0、1、2、\dots$$

因 A 点处是第 6 条暗纹中心，故取 $k=5$ ，由此得 A 点处二氧化硅的厚度为

$$e_A = (2k+1) \frac{\lambda}{4n_2} = (2 \times 5 + 1) \frac{589\text{nm}}{4 \times 1.76} = 920\text{nm}$$

微视频17.8
牛顿环

17.3.6 牛顿环

等厚干涉不仅可以发生在劈尖形薄膜上，还能发生在球面与平面夹成的气体或液体薄层上。牛顿环就是这样一种典型的等厚干涉器件。图 17.25 给出了牛顿环器件的实物照片，它将一块半径 R 很大（可达数米）的平凸透镜放在一块光学平板玻璃上，于是在透镜与平板玻璃之间就形成了一层以接触点为中心的介质薄膜（可以是空气膜，也可以是某种液体介质膜）。当



图17.25 牛顿环器件

用单色平行光垂直照射时，即可看到一组以接触点为圆心的圆环形干涉条纹。图 17.26 给出了牛顿环器件的结构示意图和圆环形干涉条纹的照片，其中任意一条干涉条纹都相当于介质膜的一条等厚线。牛顿早在 1675 年就已经观察到了这一现象，因此人们将这样的干涉圆环称为**牛顿环**（Newton ring）。

如图 17.26 所示，假设用波长为 λ 的单色平行光垂直照射在牛顿环上，介质膜的折射率为 n 。P 点处介质膜的厚度为 e ，由于透镜和平板的材质相同，折射率相同，所以光线在介质膜上下两个表面反射时反射条件不同，有附加光程差 $\lambda/2$ ，故两条反射光线的总光程差为

$$\delta_{\text{反}} = 2ne + \lambda/2 \quad (17.52)$$

又由图中的几何关系，可得

$$R^2 = (R-e)^2 + r^2$$

式中： R 为平凸透镜的球面半径，其值可达数米， r 为牛顿环

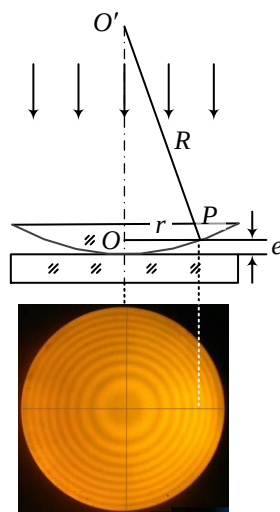


图17.26 牛顿环

的半径，一般不超过 2cm， e 为介质膜的厚度，只有几十微米，显然 $R \gg e$ 。将上式展开，略去 e^2 项，可得

$$2e = r^2/R \quad (17.53)$$

将上式代入式 (17.52)，有

$$\delta_{\text{反}} = 2ne + \lambda/2 = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

最后利用反射光的干涉加强条件： $\delta_{\text{反}} = k\lambda$ ，可得第 k 级明环的半径为

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda'}{2}} \quad (17.54)$$

利用反射光的干涉减弱条件： $\delta_{\text{反}} = (2k+1)\lambda/2$ ，可得第 k 级暗环的半径为

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}} = \sqrt{kR\lambda'} \quad (17.55)$$

式中 $\lambda' = \lambda/n$ 是光在介质膜中的波长。

在光学元件的加工生产中，常用牛顿环来检测透镜的加工质量。如图 17.27 所示，将标准件和受检件的球面放在一起，观察干涉条纹。当出现圆环形干涉条纹时，表明受检件已是球面，只是球面半径尚不达标（请读者思考如何判断半径偏大还是偏小？）；若出现非圆环形干涉图样，就表明受检件还不是球面。

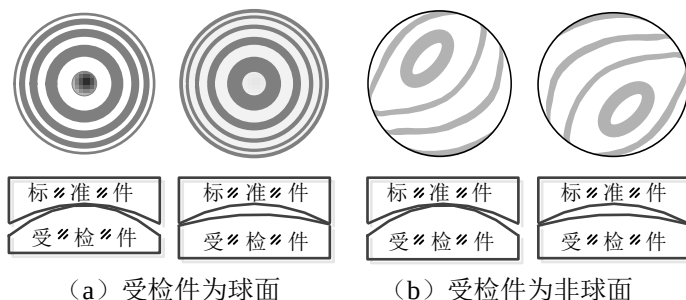


图17.27 用牛顿环检测球面加工质量

§ 17.4 迈克耳孙干涉仪

在光的波动理论发展达到巅峰时期的 19 世纪下半叶，科学家们利用光的干涉原理设计制作了许多干涉装置，进行各种精密测量。1881-1883 年，美国物理学家迈克耳孙

(Michelson) 和莫雷 (Moley) 为了研究光的传播媒质以及光速的测定问题, 采用分振幅法双光束干涉原理, 设计出了一种精密的光学测量干涉仪——迈克耳孙干涉仪。它构造精巧, 用途广泛, 是近代许多干涉装置的原型。

17.4.1 迈克耳孙干涉仪的结构与工作原理

迈克耳孙干涉仪是一种典型的分振幅法双光束干涉装置, 图 17.28 (a) 是该仪器照片。

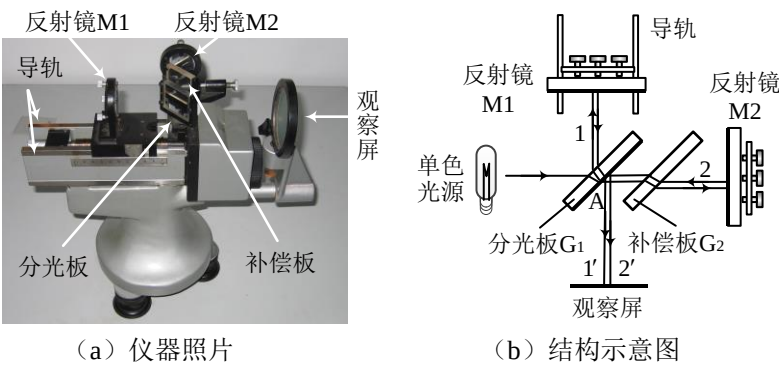


图17.28 迈克尔孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪的结构示意图如图 17.28 (b) 所示。图中 M1、M2 是两块经过精密磨光的平面反射镜, 分别装在相互垂直的两臂上, 载着 M1 的滑座由精密丝杆带动可在导轨上前后滑动。在两臂轴的相交处, 平板玻璃 G_1 与平面反射镜成 45° 角放置, 因其后表面上镀了半反射银膜, 能将入射光分割成振幅大致相等的反射光和透射光, 于是得名分光板。 G_2 是与 G_1 的材质和尺寸完全相同的玻璃板, 只是后表面没有涂银膜, 它与 G_1 平行放置, 用于对 G_2 所在的光学臂进行光程补偿, 故称为补偿板。M1、M2、 G_1 是迈克耳孙干涉仪中三个最核心的基本光学元件。

从图 17.28 可见, 由光源发出的一条光线进入分光板 G_1 后, 经半反射银膜的 A 点反射和折射后分成反射光 1 和透射光 2, 反射光 1 垂直地射向 M1, 经 M1 反射后沿原路返回, 再次进入 G_1 板, 穿透而过的部分就成为射向观察屏的光线 1'; 透射光 2 沿另一臂垂直地射向反射镜 M2, 经 M2 反射后返回 A 点, 并在 A 点反射成为射向观察屏的光线 2'。显然, 1'、2' 是两条由分振幅法获得的相干光, 因而在相遇时会产生干涉。这里特别强

调一下补偿板 G_2 的作用, 光线 $2'$ 往返两次穿过补偿板 G_2 使得光线 $2'$ 和光线 $1'$ 通过玻璃的路程完全相同, 这就消除了玻璃的色散对干涉条纹的影响。在白光进行的实验中, 补偿板不可或缺。若用单色光进行实验, 补偿板则可有可无。

下面, 我们来分析迈克耳孙干涉仪所产生的干涉条纹的特点。

经过 G_1 板上半反射银膜的反射, 使得 M_2 在 M_1 附近成一虚像 M_2' , 因此光线 $1'$ 、 $2'$ 之间的干涉就等效于由 M_1 和 M_2' 之间的空气薄膜所产生的薄膜干涉, 如图 17.29 所示。

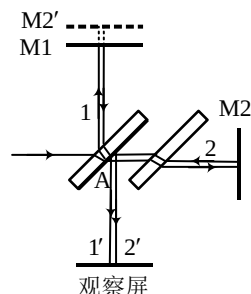
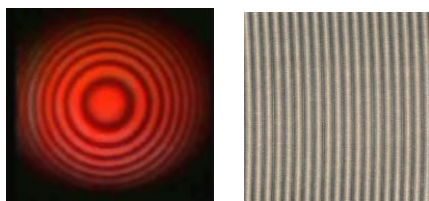


图17.29 迈克尔孙干涉仪的工作原理

当 M_1 、 M_2 严格地相互垂直时, M_1 、 M_2' 就严格地相互平行, 它们之间的空气膜就是厚度均匀的, 这时发生的就是平行平面膜的等倾干涉; 用扩展光源照射, 在透镜的焦平面上能观察到明暗相间的同心圆环形干涉条纹, 如图 17.30 (a) 所示。由等倾干涉的条纹特点可知, 内环的条纹级次较高, 外环的条纹级次较低, 在条纹的圆心处 (即 $i=0$ 处), 条纹级次由 $\delta = 2e + \lambda/2 = k\lambda$ (明) 或 $\delta = 2e + \lambda/2 = (2k+1)\lambda/2$ (暗) 决定。因此, 如果使 M_1 在导轨上来回移动, 就相当于改变了等效空气膜的厚度, 圆心处的条纹级次就会发生相应改变。当空气膜的厚度每增加 (或减小) $\lambda/2$ 时, 从干涉图样的中心就会冒出 (或陷入) 一个环纹。通过观测环纹中心处冒出 (或陷入) 的条纹数, 就可算出 M_1 移动的距离。

当 M_1 、 M_2 不严格地相互垂直时, M_1 、 M_2' 之间形成一等效的空气劈尖, 在平行光照射下, 就可观察到等厚干涉直条纹, 如图 17.30 (b) 所示。

当 M_1 在导轨上移动时, 空气劈尖的劈尖角不变而各处的厚度同步变化, 可观察到干涉条纹沿垂直于条纹的方向整体平移, M_1 每移动 $\lambda/2$ 的距离, 就有一个条纹移过视场中的任意固定点。在移动 M_1 的过程中, 数出移过某一固定点的条纹数目 ΔN , 就可算出 M_1 移动的距离



(a) M_1 和 M_2 严格垂直时的等倾干涉条纹

(b) M_1 和 M_2 不严格垂直时的等厚干涉条纹

图17.30 迈克尔孙干涉仪中的干涉条纹

$$\Delta L = \Delta N \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (17.56)$$

17.4.2 迈克耳孙干涉仪的应用

迈克耳孙干涉仪的最大特点就是两束相干光被完全分开，我们能根据需要轻易地调节它们的光程差，精度可达几十分之一波长，因而在精密测量方面有着广泛的应用。若将待测介质或其它器件插入光路，就能检测它们的某些物理参数，如介质的折射率等。

迈克耳孙和莫雷当初合作设计迈克耳孙干涉仪，是为了研究以太的性质，企图测量地球相对于以太的运动速度，这个实验称为迈克耳孙-莫雷实验，是相对论发展史上的关键性实验之一。1905年，爱因斯坦提出了著名的狭义相对论（详见第20章），1915年他进一步提出了广义相对论，并在1916年预言了“引力波”。2016年，科学家们宣布：人类成功地利用大型迈克耳孙激光干涉天文台验证了“引力波”理论，从而使爱因斯坦在广义相对论中的所有预言得到了完全证实。详情请用手机扫描本页中的二维码，阅读“‘引力波’的探测——激光干涉测量的最新成就”。

在迈克耳孙干涉仪上添置适当配件，就成了干涉型测长传感仪。如果已知光波的波长 λ ，就可精确测量物体的长度。例如，使待测物的长度方向与M1所在光学臂平行（但不遮挡光路），在将M1从待测物一端平移到另一端的过程中，准确记录移过视场某一固定点的等厚干涉条纹的数目 ΔN ，再利用式（17.56）就可算出此物体的长度。由于可见光的波长是0.1微米级的，即使 ΔL 只有几毫米长，视场中移过的干涉条纹数也能成百上千，于是测量精度相当高。现代干涉仪采用光电自动计数器（CCD技术）来记录 ΔN ，条纹移动数目 ΔN 可以精准到1/10条以下，长度的测量精度可达 10^{-8}m 。

另一方面，如果精准地知道某标准物体的长度，则我们可以此作为比较的基准，来测定光波的波长。1892年，在温度 15°C 、压强为760毫米汞柱的干燥空气中，迈克耳孙用其干涉仪测定了镉（Cd）原子的红色光谱线的波长，结果为 643.84696nm ，并由此测得保存在巴黎的国际标准米尺的长度 1m 等于镉原子红光波长的155316.5倍。因为物质原子所发光的波长是高度稳定的，且易于重现，因此用光波波长作为长度标准也就具有恒久不变的优点。1960年举行的第11届国际计量大会，曾决定使用单色性更好的氪-86（ ^{86}Kr ）的橙色光的波长作为长度基准，即 $1\text{m}=1650763.73\lambda_{\text{Kr}}$ 。

迈克耳孙干涉仪还可以用来精密测定某种介质的折射率或折射率的微小变化量。在其一个光学臂中插入一厚度 L 已知的某种透明介质，设其折射率为 n ，则两相干光束的光

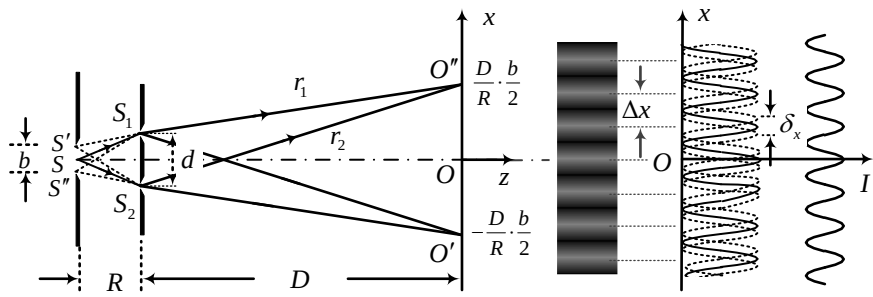
程差改变了 $2(n-1)L$ ，只要记录干涉条纹移动（或中心光斑吞吐）的数目，就能算出光程差的改变量，从而求出该介质的折射率 n 。

§ 17.5 光波的空间相干性与时间相干性

17.5.1 光源宽度对条纹可见度的影响 光的空间相干性

在讨论杨氏双缝实验时，我们曾假设缝光源 S 是理想的线光源，但实际上光源是有一定宽度的，这将对干涉条纹的可见度产生影响。实验发现，如果逐渐加大缝光源的宽度，可观测到屏幕上的干涉条纹会变得越来越模糊，直到干涉条纹完全消失。

干涉条纹的可见度随光源宽度的增加而减小的原因，是因为有一定宽度的缝光源实际上是由许多非相干的线光源组成的；每个线光源（如图 17.31（a）中的 S' 、 S 、 S'' ）发出的光波都会形成一套独立的干涉条纹，各套干涉条纹重叠在一起时只能产生非相干叠加，从而使干涉条纹的对比度下降，如图 17.31（b）所示。当缝光源中上下两个边缘的线光源（不妨设为 S' 和 S'' ）产生的两套干涉条纹错开的距离 δ_x 大于或等于双缝干涉的条纹间距 Δx 时，干涉条纹的可见度为零，即干涉条纹彻底消失。



（a）狭缝（光源）宽度对干涉条纹的影响 （b）干涉条纹的对比度下降

图17.31 光的空间相干性

在图 17.31（a）中，缝光源正中央的线光源 S 发出的光波在观察屏上产生的零级明条纹位于 O 点处， S 上方和下方的线光源产生的零级明条纹分别移到了 O 点的下方和上方。距离 S 越远的线光源，其零级明条纹的移动量越大。若缝光源的宽度为 b ，其上边缘处的线光源 S' 发出的光在屏上产生的零级明条纹位于 O' 处，则由零级明纹的干涉条件，

有

$$(R_2 + r_2) - (R_1 + r_1) = 0$$

式中： $R_1 = S'S_1$ ， $R_2 = S''S_1$ 。在 $d \ll R$ 和 $b \ll R$ 的条件下， $R_2 - R_1 = \frac{d}{R} \cdot \frac{b}{2}$ ， 而

$r_2 - r_1 = \frac{d}{D} x'$ ， 由此可得 O' 点的坐标为

$$x' = -\frac{D}{R} \cdot \frac{b}{2}$$

同理，缝的下边缘的线光源 S'' 发出的光在屏上产生的零级明条纹位于 O'' 处，其坐标为

$$x'' = \frac{D}{R} \cdot \frac{b}{2}$$

不难理解，缝光源上所有其它的线光源在屏上产生的零级明条纹的位置都在 O' 和 O'' 之间，即整个缝光源产生的零级明条纹所占的宽度为

$$\delta_x = \frac{D}{R} b$$

对于其它各级干涉条纹，情形也是如此。这样，就使得总的干涉条纹中明纹和暗纹之间强度差大大减小，条纹可见度降低，如图 17.31 (b) 所示。当 δ_x 等于或大于双缝干涉的条纹间隔 Δx 时，整个屏上就是一片明亮，看不到干涉条纹了。因此，干涉条纹可见度不为零的条件是

$$\delta_x = \frac{D}{R} b < \Delta x = \frac{D}{d} \lambda \quad (17.57)$$

即

$$b < \frac{R}{d} \lambda \quad (17.58)$$

这样，对于一个给定宽度 b 的缝光源，要使观察屏上条纹的可见度大于零，双缝之间的距离 d 就必须满足

$$d < \frac{R}{b} \lambda \quad (17.59)$$

上式表明，有一定宽度的光源所发的光波波阵面上，并不是任意两处的子波源发出

的光都能产生干涉条纹，这一性质称为光的空间相干性（Spatial coherence of light）。光源的空间尺度越小，波阵面上能产生干涉条纹的两个子波源的距离就越大，光的空间相干性越好。在点光源的任一波阵面上任意两个子波源发出的光都能产生干涉条纹，因此点光源发出的光波具有最好的空间相干性。激光光源可以看成理想的点光源，所以激光的空间相干性非常好，将激光直接照射在双缝上，也能获得可见度很高的干涉条纹。

17.5.2 光的时间相干性

除了光源的宽度之外，波列的长度也会影响干涉条纹的可见度。

我们知道，原子发光是原子从高能级向低能级跃迁时发生的，且每次跃迁（即发光）的持续时间极其短暂，一般在 $10^{-11}\text{s} \sim 10^{-8}\text{s}$ 之间，因而原子辐射的波列长度是有限的。如果两束相干光到达某一点时的光程差大于该波列的长度，则无论采用分波阵面法，还是分振幅法，都无法产生干涉现象，这是因为从同一波列分出的两相干波列在该点根本无法相遇（其中一列波通过该点时，另一列波还没有到达）。所以，如果某种单色光的波列长度为 l_0 ，两列光波相遇并能产生干涉现象的最大光程差就是该光波的波列长度，即 $\delta_m = l_0$ ， δ_m 称为光波的相干长度（coherent length）。相应地，两列光波到达相遇点的时间差不能超过 $\tau_m = l_0/c$ ， τ_m 就称为相干时间（coherence time）。光波的波列长度 l_0 （或相干长度 δ_m ）越大，两列光波到达相遇点时允许的时间差就越大，干涉条纹的可见度就越好。由此可见，相干长度 δ_m （或者相干时间 τ_m ）标志着光波相干性的好坏，光波的这种性质称为光的时间相干性（temporal coherence）。

一般地，普通光源所发的光波时间相干性较差。白炽灯、日光灯等所发光波的相干长度远小于1毫米，有些甚至只有几微米。即便是实验室常用的钠黄灯所发的单色光，相干长度也不过十几毫米。激光作为一种相干性极好的光源，不仅拥有相当大且稳定的相干长度（或相干时间），还兼备良好的方向性和很强的光强，因而许多干涉仪都选择激光作为相干光源。

另一方面，光的时间相干性与光源的谱线宽度是高度相关的两个概念。在讨论光的干涉时，经常假设光源是单色的，即光的波长是单一而确定的 λ 。实际上，严格的单色光源是不存在的，任何光源都具有一定的谱线宽度 $\Delta\lambda$ ，即使最先进的激光光源也是如此，都可以发出波长从 $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda/2$ 到 $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda/2$ 范围内所有波长（波长连续分布）的光。

因此，谱线宽度 $\Delta\lambda$ 的大小标志着光源单色性的好坏。

图 17.32 画出了波长为 λ 、谱线宽度为 $\Delta\lambda$ 的非理想单色光源所发的波长分别为 $\lambda_1 = \lambda - \Delta\lambda/2$ 和 $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda/2$ 的两种光波在杨氏双缝干涉中的光强分布曲线，实线和虚线分别对应于 λ_1 和 λ_2 。可以看出，两种波长的光波在观察屏上各自形成一套独立的干涉条纹，由于条纹间距与波长成正比，因此除零级明条纹中心完全重叠外，其它各级明暗纹的位置都依次错开。由于两套独立的条纹不满足相干条件，所以它们只能发生非相干叠加，从而使得干涉条纹的对比度下降。由图可见，当 λ_1 的第 k 级明条纹与 λ_2 的第 $(k-1)$ 级明条纹重叠时，干涉条纹消失了，干涉条纹的可见度变为零。由此可知，在杨氏双缝干涉中，要使条纹的可见度不为零，两束光的最大光程差应为

$$\delta_m = (r_2 - r_1)_m = k_m \lambda_1 = (k_m - 1) \lambda_2$$

式中 k_m 是干涉条纹可见度不为零的最高级次，由上式可得

$$k_m = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda}$$

由于 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda$ ，所以最大光程差为

$$\delta_m = k_m \lambda_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (17.60)$$

上式表明，光源的谱线宽度 $\Delta\lambda$ 越小，两列波相遇时能够产生干涉条纹的最大允许光程差就越大，光源的时间相干性越好。

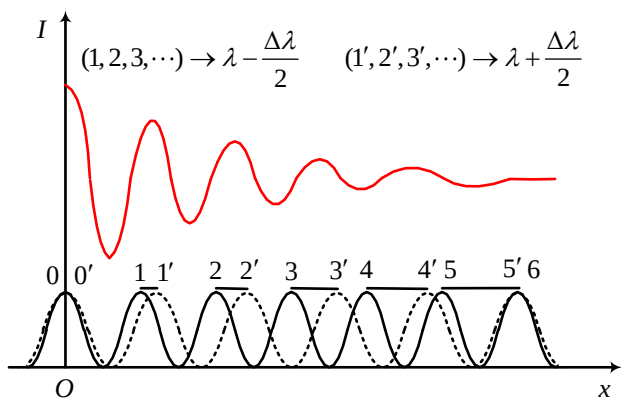


图17.32 谱线宽度对双缝干涉光强分布的影响

思考题

- 17.1 为什么两个同频率的独立的单色光源发出的光波叠加时不能产生干涉现象？
- 17.2 获得相干光有哪些方法？
- 17.3 假设两列光波在相遇区域内的光强相同，即 $I_1 = I_2 = I_0$ 。当不满足相干条件时，相遇区域中任意一点的总光强为多少？当满足相干条件时，相遇区域中的最大光强和最小光强分别为多少？
- 17.4 在杨氏双缝干涉实验中（请参考图 17.4 (a)），如果将缝光源 S 在双缝 S_1 和 S_2 的中垂线上左右移动一点距离，观察屏上的干涉条纹有何变化？如果将缝光源 S 沿平行于 S_1 和 S_2 的连线方向平移一点距离，屏上的干涉条纹又将如何变化？
- 17.5 在杨氏双缝干涉实验中，如果将双缝间距逐渐增大，干涉图样有何变化？如果将整个干涉装置从空气中移入水中，干涉图样有何变化？
- 17.6 1982 年的英阿马岛之战，虽以阿根廷失败而告终，但弱小的阿根廷空军也曾创造以弱胜强，成功奇袭的战例。他们的几位空军勇士驾驶“超级军旗”战机，掠海飞行，远程奔袭，成功躲过了英军战舰上雷达波的追踪侦察，直至接近目标时才跃起攻击，成功击沉英军曾引以为豪的“谢菲尔德”导弹驱逐舰。试以洛埃镜干涉实验的原理来说明阿军战机是如何躲过英军战舰雷达波的搜索而成功奇袭的？
- 17.7 为什么要引入光程的概念？光程差与相位差的关系是什么？
- 17.8 在杨氏双缝干涉实验中，如果在其中一个狭缝上覆盖一层透明介质，干涉图样有何变化？
- 17.9 什么是等倾干涉？为什么在等倾干涉中可以用扩展的面光源来照明？使用面光源对条纹的可见度有影响吗？
- 17.10 等倾干涉条纹有什么特点？什么是吞级现象？什么是吐级现象？每吞掉或吐出一个条纹，薄膜的厚度变化多少？
- 17.11 劈尖干涉的条纹特征是什么？在精密测量技术中它有什么应用？
- 17.12 能否用牛顿环测量一个平凹透镜的球面半径？为什么？
- 17.13 当移动迈克耳孙干涉仪中的反射镜 $M1$ 时，如何判断等效空气薄膜的厚度是在增加还是在减小？
- 17.14 什么是光源的空间相干性？光源的空间相干性与光源的什么因素有关？
- 17.15 什么是相干长度？它的物理意义是什么？它和光源的谱线宽度有何关系？

习题

文档 17.2 第 17 章
光的干涉习题答案

17.16 在双缝干涉实验中，高压汞灯发出的光通过一个绿色滤光片后垂直地照到狭缝上。已知两个狭缝相距 0.600mm ，双缝与观察屏之间的距离为 2.500m 。测得观察屏上中央明纹两侧两个第 5 级暗纹之间的距离为 20.43mm ，试计算入射光的波长。

17.17 在双缝干涉装置中，已知双缝间距离为 0.300mm ，双缝到观察屏的距离为

1.200m。今以单色平行光垂直照射狭缝，测得屏上中央明纹同侧第 1 个到第 11 个暗条纹中心的距离为 25.31mm。试求

- (1) 单色光的波长；
- (2) 观察屏上第 5 级暗条纹中心到中央明纹中心的距离。

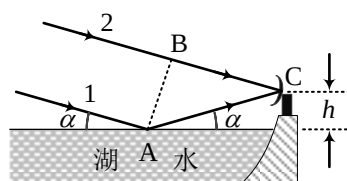
17.18 在菲涅尔双棱镜干涉装置中，棱镜的折射率 $n=1.5$ ，狭缝光源到棱镜的距离 $R=20.0\text{cm}$ ，棱镜到观察屏的距离 $L=2.00\text{m}$ 。若用波长 $\lambda=600\text{nm}$ 的橙色光垂直照射狭缝，测得屏上干涉条纹的间距是 2.0mm ，求棱镜的顶角 δ 。

17.19 在杨氏双缝实验中，双缝到观察屏的距离为 1.50m 。用 $\lambda=632.8\text{nm}$ 的 He-Ne 激光束垂直照射时，测得中央明纹两侧第三级明条纹中心之间的距离为 9.50mm 。

- (1) 求双缝的间距；
- (2) 若将厚度为 $20\mu\text{m}$ 的薄膜覆盖在其中一缝上，观察屏上的干涉条纹移动了 20.0mm ，求该薄膜的折射率。

17.20 在杨氏双缝实验中，狭缝 S_1 被折射率 $n_1=1.30$ 的透明薄膜覆盖，狭缝 S_2 被折射率 $n_2=1.70$ 的透明薄膜覆盖，假设两薄膜的厚度相同。今用波长 $\lambda=480\text{nm}$ 的单色光照射，发现覆盖薄膜前屏上零级明纹中心的位置，现在是第 10 级暗纹中心的位置，试求薄膜的厚度。

17.21 如图所示，是射电信号（即微波信号）的干涉与接收装置。接收器 C 离湖面的高度 $h=0.5\text{m}$ 。当一颗遥远的射电星从地平面渐渐升起时，接收器 C 接收到的信号会交替出现一系列极大值与极小值。已知射电星发出的射电信号的波长为 $\lambda=20.0\text{cm}$ 。求接收器第一次检测到信号的极大值时，射电星的方位与湖面所成的夹角 α 。（提示参考洛埃镜实验，用双光束干涉理论求解）



习题17.21图

17.22 在太阳光照射下，空气中肥皂膜上的反射光呈深绿色，此时膜的法线和视线的夹角为 35° ，已知肥皂膜的折射率为 1.33 ，绿光波长为 500nm 。

- (1) 估算肥皂膜的最小厚度；
- (2) 若太阳光垂直入射，则反射光呈何颜色？

17.23 透镜表面镀了一层折射率 $n=1.38$ 的 MgF_2 透明薄膜。为使氦氖激光器发出的

波长 $\lambda = 632.8\text{nm}$ 的激光在垂直入射时能够毫无反射地透过，问这层薄膜至少有多厚？

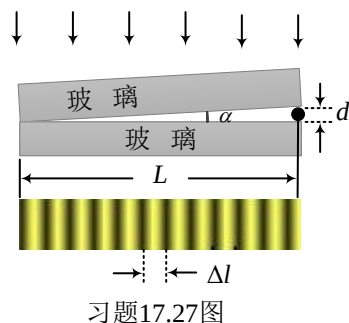
17.24 在折射率 $n_3 = 1.65$ 特种玻璃表面镀一层折射率 $n_2 = 1.38$ 的 MgF_2 薄膜。若该薄膜的厚度为 400nm ，并用白光垂直照射，试求：

- (1) 反射光中哪些波长的光因干涉加强了？
- (2) 透射光中又是哪些波长的光因干涉加强了？

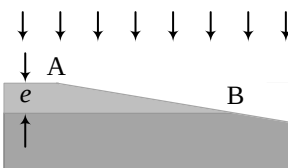
17.25 平静的水面上有一层油膜，已知油膜的折射率 $n_2 = 1.40$ ，厚度 $e = 480\text{nm}$ 。

- (1) 如果太阳位于该片水面的正上方。当一直升机飞临该片水域上方时，机上人员观察到油膜将呈什么颜色？
- (2) 在油膜的透射光中，哪些波长的光满足干涉加强条件？如果一潜水员潜入该水域，将观察到油层呈什么颜色？

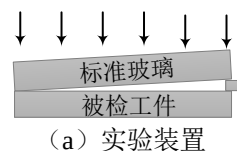
17.26 将油膜覆盖在玻璃板上，用波长可以连续变化的光垂直照射，观察到反射光中 500nm 和 700nm 这两个波长的光完全消失，而在这两个波长之间，没有其它波长的反射光出现干涉极小。已知油膜的折射率 $n_2 = 1.30$ ，玻璃的折射率 $n_3 = 1.50$ ，试求油膜的厚度。



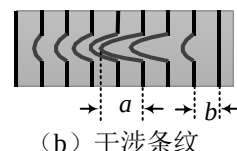
17.27 用等厚干涉测细丝直径的方法如图所示。已知 $L = 28.88\text{mm}$ ，入射光的波长为 589.3nm ，测得 30 条条纹之间的距离为 4.295mm ，试求细丝的直径。



17.28 在折射率为 1.50 的玻璃表面镀一层折射率为 1.65 的透明薄膜。为测出该薄膜的厚度，将薄膜的边缘打磨成劈尖形状，如图所示。现用波长为 589nm 的钠黄光垂直照射，发现从 B 到 A 共有 5 条明纹，且 A 点恰好是第 5 个明纹中心。试求该薄膜的厚度。



17.29 利用楔形膜产生的等厚干涉条纹检验工件表面平整度的装置如图 (a) 所示。当用单色平行光垂直照射时，在反射光中观察到的干涉条纹如图 (b) 所示，图中 b 是无缺陷处条纹的间距， a 是有缺陷处条纹弯曲的最大偏移量。试问：



- (1) 工件表面的缺陷是鼓包，还是凹陷？

习题17.29图

(2) 该鼓包（或凹陷）的最大高度（或深度）是多少？（用入射光的波长 λ 表示）

17.30 在牛顿环实验中，通过读数显微镜测得某一暗环的直径为 3.00 mm ，在它的外面第 5 个暗环的直径为 4.60 mm ，已知平凸透镜的球面曲率半径为 1.03 m ，试求此单色光的波长。

17.31 在牛顿环实验中，平凸透镜的球面曲率半径为 5.00 m ，透镜的孔径为 3.00 cm 。用波长 $\lambda = 589\text{ nm}$ 的钠黄光垂直照射，试问：

(1) 最多可以产生多少个圆环形干涉亮条纹？

(2) 若把这个装置放在水（ $n = 1.33$ ）中，最多能看到多少个圆环形干涉亮条纹？

17.32 当牛顿环装置的透镜与玻璃平板之间充满液体时，实验发现，第 10 个明环的直径由没有充液体时的 1.40 cm 变为现在的 1.27 cm ，求该液体的折射率。

17.33 在透镜加工中，常用牛顿环来检测透镜的球面曲率半径是否符合标准。将待测透镜放在一个标准件（平凹透镜）上，并用波长为 λ 的单色平行光垂直照射，已知标准件上凹球面的曲率半径为 R_0 ，待测的凸球面的曲率半径为 R 。

试证明：当 $R_0 > R$ 时，干涉图案中第 k 级明环的半径为

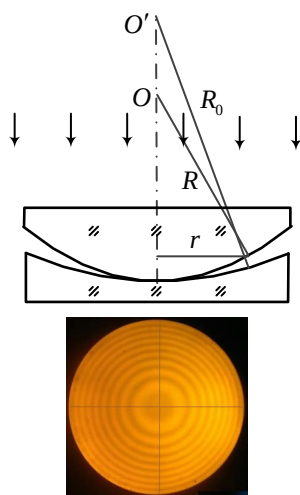
$$r = \sqrt{(2k+1) \frac{R_0 R \lambda}{2(R_0 - R)}}$$

17.34 在迈克耳孙干涉仪中，当反射镜在导轨上移动 0.330 mm 时，测得条纹变动了 192 次，求入射光的波长。

17.35 把折射率 $n = 1.40$ 的薄膜插入迈克耳孙干涉仪的一臂时，如果由此产生了 7 条干涉条纹的移动。设入射光的波长 $\lambda = 589\text{ nm}$ ，求此薄膜的厚度。

17.36 在迈克耳孙干涉仪的两臂中，沿臂的方向分别放入 $l = 10.00\text{ cm}$ 长的玻璃管，其中一个被抽成真空，另一个则储有压强为 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 的空气，用以测量空气的折射率 n 。设所用的光波波长为 546.0 nm ，实验时，向真空玻璃管中逐渐充入空气，直至压强达到 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 。在此过程中，观察到 107.2 条干涉条纹的移动，试求空气的折射率 n

17.37 某 He-Ne 激光器发出的激光的波长 $\lambda = 632.8\text{ nm}$ ，其谱线宽度



习题17.33图

$\Delta\lambda = 2 \times 10^{-6} \text{ nm}$ ，试求它的相干长度和相干时间。

第 18 章 光的衍射

课件下载：
第 18 章 光的衍射

衍射和干涉一样，都是波动过程的重要特征。所谓衍射就是指当波在传播过程中遇到障碍物时偏离直线传播的绕射现象。在机械波一章中，我们已经学习了机械波（例如水面波和声波）的衍射现象。本章我们将学习光的衍射现象。首先介绍衍射的基本理论——惠更斯-菲涅尔原理，然后介绍三种典型的夫琅禾费衍射，即单缝、圆孔、光栅的夫琅禾费衍射，最后介绍晶体对 X 射线的衍射。

§18.1 惠更斯-菲涅尔原理

18.1.1 光的衍射现象

在我们的日常生活中，机械波甚至是无线电波的衍射现象很容易观察到，例如水面波可以绕过水面上一个障碍物，声波可以通过墙上的门窗绕到墙体的背后，无线电台发射的无线电波可以轻易地越过山头，被处于山的另一侧的接收器接收到等等。但是光的衍射现象在日常生活中却很难被观测到。这是因为可见光波的波长很短，其长度远远小于普通障碍物的大小，所以在日常生活中我们看不到光的衍射现象，只有在实验室中，才能看到光的衍射现象。

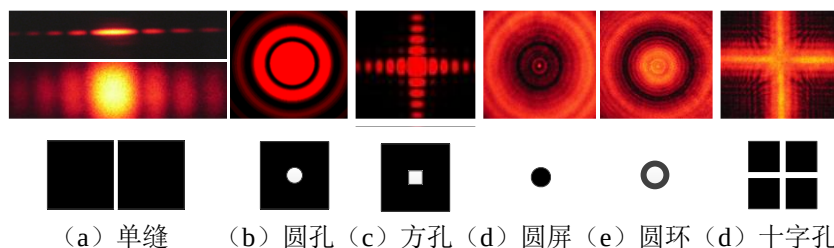


图 18.1 光的衍射现象

图 18.1 给出了激光束通过单缝、圆孔、方孔、圆屏、圆环、十字孔后的衍射图案。从衍射图的形状来看，前三种衍射图案与障碍物的形状完全不同，这类衍射图称为夫琅禾费衍射图，后三种衍射图案与障碍物的形状基本相似，称为菲涅尔衍射图案。

光的衍射现象最早被发现于 19 世纪初，杨氏双缝干涉实验之后。最初物理学家发现光通过圆孔或直边以后会出现衍射现象，但用牛顿的微粒学说对此无法做出正确解释。1918 年，法国科学院发出悬赏征文以求解决光的衍射问题。当时，年轻的菲涅尔（Augustin-Jean Fresnel, 1788-1827）受到杨氏双缝干涉实验的启发，在他提交的论文中，利用惠更斯提出的光的波动学说，并引入子波干涉的思想，运用菲涅尔半波带方法，圆满地解释了光的衍射现象。

文档 18.1 菲涅尔

然而，当时牛顿的微粒学说在科学界仍然占有统治地位，特别是法国科学院的一些权威学者都是牛顿微粒学说的支持者，他们对菲涅尔的论文提出了强烈的质疑。最典型的是数学家泊松（S. D. Poisson, 1781-1840），他利用菲涅尔的半波带方法推出了一个在他看来是非常荒谬的结果，即当光照射到不透明的圆屏上时，由于衍射，在圆屏后面阴影的中心会出现一个亮点。由此，泊松认为菲涅尔的波动理论是完全错误的。



物理学家 菲涅尔

为了验证波动理论的正确性，菲涅尔的朋友，波动理论的支持者，另一位论文的评审员阿喇戈（D. F. Arago, 1786-1853）利用其精湛的实验技术，验证了在小圆盘阴影的中心确实可以看到一个因衍射形成的亮斑。后来，人们将这个亮斑称为“泊松亮斑”。

“泊松亮斑”的实验验证给了波动理论以巨大的支持，法国科学院在经过激烈辩论之后，最终把奖金授予了菲涅尔。同时光的波动理论在与光的微粒学说的较量中逐渐胜出。

18.1.2 惠更斯-菲涅尔原理

在第 7 章机械波中，我们曾用惠更斯原理对机械波的衍射现象做出了定性解释，但是惠更斯原理不能解释光波到达阴影区域时为什么会产生明暗相间的衍射条纹，更无法确定衍射区域内的光强分布。

1818 年，菲涅尔受到杨氏双缝干涉实验的启发，提出了“子波相干叠加”概念，补充和丰富了惠更斯原理，发展成为惠更斯-菲涅尔原理。他认为，从同一波面上各点发出的子波都是相干的，在各子波传播到的空间某一点上，该点的光强是所有到达该

点的子波相干叠加的结果。这就是惠更斯-菲涅尔原理。

菲涅尔根据这个原理，提出了一个计算光强分布的积分公式。如图 18.2 所示，设 dS 是某个已知波面 S 上的一个发光面元，该面元到波面前方某点 P 的矢径为 r ，矢径 r 与 dS 的法线之间的夹角为 θ ，该面元在 P 点引起的光振动的相位由光波的传播距离 r 来确定，则 dS 在 P 点产生的光振动的振幅为

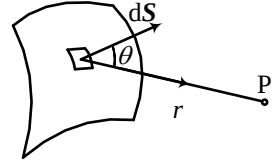


图 18.2 子波相干叠加

$$dE = a \frac{k(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi\right) dS$$

式中 a 是由 dS 处的光强决定的系数， φ 是发光面元 dS 的振动初相位， $k(\theta)$ 是倾斜因子，随 θ 的增大而减小，当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时， $k(\theta) = 0$ ，这表明光波不可能自动向后传播。于是，根据波的叠加原理， P 点处总的光振动振幅为

$$E = \int a \frac{k(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \varphi\right) dS \quad (18.1)$$

上式积分一般来说是比较复杂的，只有少数几种简单情况才可以求得解析解。不过，现在可以利用计算机进行数值求解。在非物理专业的大学物理教学中，我们不要要求学生求解上述积分式，但要求能理解惠更斯-菲涅尔原理中关于“子波相干叠加”的思想。

18.1.3 衍射的分类

根据光源、障碍物（衍射孔）和观察屏之间的距离，可将光的衍射分成两类，即菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射。

图 18.3 (a) 所示为菲涅尔衍射，在这类衍射中，光源与障碍物（衍射孔）、障碍物与观察屏之间的距离是有限的，或至少有一个是有限的，因此菲涅尔衍射也称为近场衍射，菲涅尔衍射图的形状与障碍物的形状基本相似，如图 18.1 中的 (d)、(e)、(f)。图 18.3 (b) 是夫琅禾费衍射，在这类衍射中，光源与障碍物（衍射孔）、障碍物与观察屏之间的距离都是无限远的，所以夫琅禾费衍射也称为远场衍射。当然，

实际操作时，不可能真的将光源和观察屏移到无穷远处，而是利用两个透镜来实现夫琅禾费衍射，如图 18.3 (c) 所示。在这一章中，我们将只讨论夫琅禾费衍射，对于菲涅尔衍射的分析，感兴趣的读者可以参考专门的光学书籍。

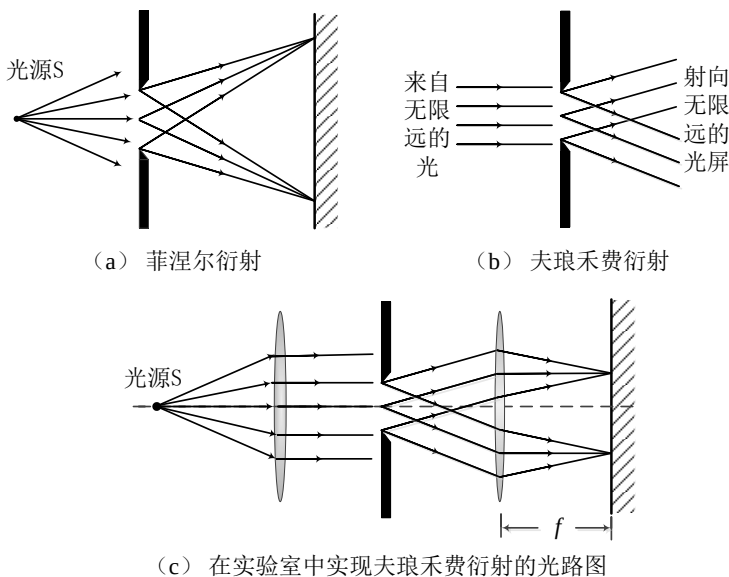


图 18.3 两类衍射——夫琅禾费衍射和菲涅尔衍射

§18.2 单缝的夫琅禾费衍射

18.2.1 衍射装置及衍射图样的光强分布特征

单缝夫琅禾费衍射的实验装置如图 18.4 所示，将点光源（或线光源） S 放在透镜 L_1 的焦点（或焦平面）上，由透镜射出的平行光垂直地射到宽度为 a 的狭缝上，在狭缝后放置一个会聚透镜 L_2 ，观察屏放在 L_2 的焦平面上，即可在观察屏上看到一系列与狭缝方向垂直的光斑（当 S 为点光源时）或一组与狭缝平行的明暗相间的衍射条纹（当 S 为线光源时）。此外实验还发现，无论用点光源还是线光源照射，观察屏上沿垂直于狭缝方向（即图中 x 方向的光强分布是相同的），且中央明条纹的宽度是其他各级明条纹宽度的两倍。

根据惠更斯-菲涅尔原理，用振幅矢量叠加法（参见 18.2.4），可以求出当狭缝的

宽度为 a ，单色光的波长为 λ 时，观察屏的 x 轴上任意一点处的光强为

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (18.2)$$

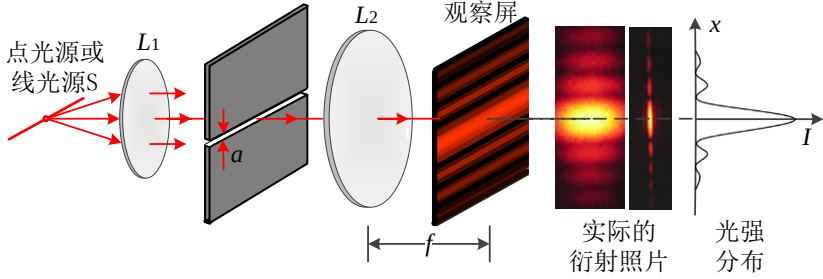


图 18.4 单缝的夫琅禾费衍射装置 衍射图样及光强分布

式中 $\beta = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta$ ， I_0 是衍射角 $\theta = 0$ 时衍射光的会聚点——透镜焦点处的光强。由上式不难看出，衍射屏上光强为零点必满足 $\beta = k\pi$ ，即

$$a \sin \theta = k\lambda \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots, k \neq 0) \quad (18.3)$$

这就是单缝夫琅禾费衍射的暗纹条件。下面，我们用菲涅尔提出的半波带法来讨论单缝衍射的明暗纹条件。

18.2.2 用菲涅尔半波带理论研究单缝衍射的明暗纹条件

如图 18.5 所示，设单缝的宽度为 a ，波长为 λ 的单色平行光垂直照射到狭缝上。则由惠更斯-菲涅尔原理可知，狭缝上的每个点都可以看作是发射子波的相干子波源，且每个子波源的振动初相位相同。现考虑沿 θ 角方向射出去的衍射光，它们将在透镜焦平面上的 P 点相遇并产生相干叠加。在这束衍射光中，上下两条边缘光线之间的光程差为 $\delta = Bc = a \sin \theta$ 。下面，首先来考虑几种特殊情况。

当 $\theta = 0$ 时， $\delta = a \sin \theta = 0$ ，即所有光线之间的光程差都为零，它们将在透镜的焦点 O 处相遇，相互之间都满足相长干涉条件，所以在 O 点处形成中央明纹的中心。

当 $\delta = a \sin \theta = \lambda$ 时，我们可将狭缝分为上下两个面积相同的窄条，如图 18.5 (a) 所示，每一窄条的上下两条边缘光线之间的光程差均为 $\lambda/2$ ，这样的—个窄条称为—

个半波带。不难想象相邻的两个半波带上任意两个对应的子波源发出的光线之间的相位差都是 $\lambda/2$ ，在 P 点相遇时满足相消干涉条件，因此 P 点此时为单缝衍射一级暗纹中心。

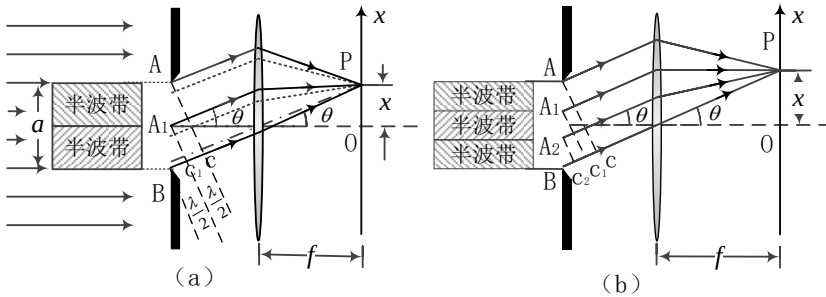


图 18.5 用菲涅尔半波带法对单缝衍射的解释

同理，当 $\delta = a \sin \theta = 3\lambda/2$ 时，我们可将狭缝分为三个半波带，如图 18.5 (b) 所示，此时，其中的两个相邻的两个半波带发出的光振动在 P 点相遇时互相抵消，剩下的一个半波带的光振动没有被抵消，所以 P 点为单缝衍射的一级明纹中心。

以此类推，当 $\delta = a \sin \theta = k\lambda = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$ 时，狭缝处的波面恰好可以被分为偶数 $(2k)$ 个半波带，因相邻的两个半波带发出的光波两两相消，故相遇点 P 为第 k 级暗纹中心；当 $\delta = a \sin \theta = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$ 时，狭缝处的波面恰好被分为奇数 $(2k+1)$ 个半波带，因两两相消后，还剩下一个半波带的光振动没有被抵消，所以 P 为第 k 级明纹中心。而且，随着半波带数目的增加，每个半波带所占有的波面的面积（即光的能量）在减小，所以随着明纹级数的增大，明条纹的亮度明显减小。

综合上述讨论可得，单缝夫琅禾费衍射的暗纹条件是

$$a \sin \theta = \pm k\lambda \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots, k \neq 0) \quad (18.4)$$

明纹条件是

$$a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots, k \neq 0) \quad (18.5)$$

需要说明的是单缝衍射的明纹条件严格来讲应该根据光强公式（式 18.2）通过求极大值的方法求出，其推导过程参见 18.2.4。由此得出的明纹条件（参见式 18.12）与上

式稍有差别，所以式 18.5 是单缝衍射明条纹的近似条件。

18.2.3 单缝衍射明条纹的角宽度和线宽度

各级衍射明条纹的宽度既可以用角宽度表示，也可以用线宽度表示。所谓明纹的角宽度，就是指明纹两侧相邻两个暗纹中心对应的衍射角之差，也就是透镜焦平面上相邻两个暗纹中心关于透镜中心的夹角，如图 18.6 所示。

在单缝的夫琅禾费衍射中，一般情况下，衍射角都很小，所以

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$

再由式 18.4 可知，各级暗条纹的衍射角为

$$\theta_k = \arcsin \frac{k\lambda}{a} \approx \frac{k\lambda}{a}$$

所以中央明条纹（也称为 0 级明条纹）的角宽度为

$$\Delta\theta_0 = \theta_1 - \theta_{-1} = 2\frac{\lambda}{a} \quad (18.6)$$

其它各级明条纹的角宽度为

$$\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = \frac{\lambda}{a} \quad (18.7)$$

由几何光学的知识可知，沿 θ 角方向入射到会聚透镜上的一束衍射光在透镜焦平面上的会聚点的坐标为： $x = f \tan \theta \approx f\theta$ ，如图 18.6 所示。由此可知，单缝衍射中央明条纹的线宽度为

$$\Delta x_0 = x_1 - x_{-1} = 2f \frac{\lambda}{a} \quad (18.8)$$

其余各级明条纹的线宽度为

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = f \frac{\lambda}{a} \quad (18.9)$$

这表明：单缝衍射中央明条纹的宽度为其余各级明条纹宽度的 2 倍。此外，由式

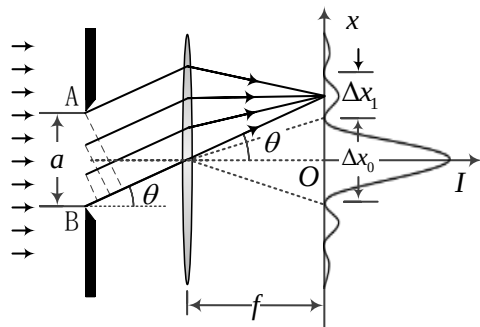


图 18.6 单缝衍射的条纹位置及宽度

18.6~18.9 可以看出，单缝衍射条纹的宽度与狭缝的宽度成反比。狭缝的宽度越小，条纹的宽度越大，衍射现象越明显。反之，当狭缝的宽度增大时，各级明条纹的宽度均减小。当 a 很大（例如达到几个毫米时，各级条纹的宽度均趋于 0，且都向焦点 O 收缩，以至于不能区分各级明条纹，这时就可以按几何光学中光线沿直线传播的情况来处理了。

例题 18.1 在单缝的夫琅禾费衍射中，单色平行光的波长 $\lambda = 546\text{nm}$ ，单缝宽度 $a = 0.437\text{mm}$ ，透镜的焦距 $f = 40.0\text{cm}$ ，如图 18.7 所示。试求：

- (1) 中央明条纹的宽度 d ；
- (2) 第 2 级明纹的宽度。

解：(1) 单缝衍射中央明条纹的宽度就是两个正负一级暗纹之间的距离。由单缝衍射的暗纹条件 $a \sin \theta = k\lambda$ ，可得 ± 1 暗纹的衍射角为

$$\theta_{\pm 1} = \pm \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \pm \frac{\lambda}{a} = \pm 1.25 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

所以，中央明条纹的宽度为

$$d = x_1 - x_{-1} = f \tan \theta_1 - f \tan \theta_{-1} = 2f \frac{\lambda}{a} = 1.0 \text{ mm}$$

(2) 第二级明纹的宽度就是第 2、3 级暗纹中心之间的距离。又第 2、3 级暗纹的衍射角分别为 $\theta_2 = \arcsin \frac{2\lambda}{a} \approx \frac{2\lambda}{a}$ ， $\theta_3 = \frac{3\lambda}{a}$ ，所以第 2 明纹的宽度为

$$\Delta x_{23} = x_3 - x_2 = f \tan \theta_3 - f \tan \theta_2 \approx f \frac{\lambda}{a} = 0.50 \text{ mm}$$

这表明，第 2 级明纹的宽度是中央明纹宽度的 1/2。

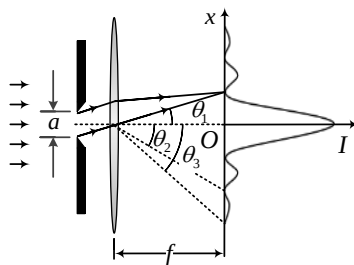


图 18.7 例 18.1 图

*18.2.4 用振幅矢量合成的方法来推导单缝衍射的光强公式

在机械振动一章中，我们用振幅矢量合成的方法讨论了同方向、同频率的两个简谐振动的合成问题。对此稍作推广，就可以用振幅矢量合成方法讨论 N 个同方向、同频率、但有一定相位差的光振动的合成。

如图 18.8 (a) 所示, 考察沿 θ 角方向射出的一束衍射光。现将通过狭缝的波面沿狭缝方向分割成 N 个相等面积的窄带 (子波带), 则每个窄带在 P 点处产生的光振动的振幅相同, 设为 ΔE ,

但相邻的两个光振动之间有一个光程差 $\delta = \frac{a \sin \theta}{N}$, 对应的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a \sin \theta}{N}$$

根据菲涅尔提出的子波相干叠加的思想, P 点光振动的合振幅就等于这 N 个子波带发出的子波在 P 点的振幅矢量的合成。这个合成可借助图 18.8 (b) 的矢量图计算出来。图中每个振幅矢量的大小都是相同的, 均为 ΔE , 相邻两个振幅矢量之间夹角 (即相位差) 均为 $\Delta\varphi$, 各振幅矢量首尾相连构成一个正多边形, 此多边形有一个外接圆, 以 R 表示该外接圆的半径, 则合振幅 E 对应的圆心角就是 $N\Delta\varphi$, 合振幅 E 的大小为

$$E = 2R \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} = 2R \sin \beta$$

式中 $\beta = \frac{N\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$, 外接圆的半径 R 满足

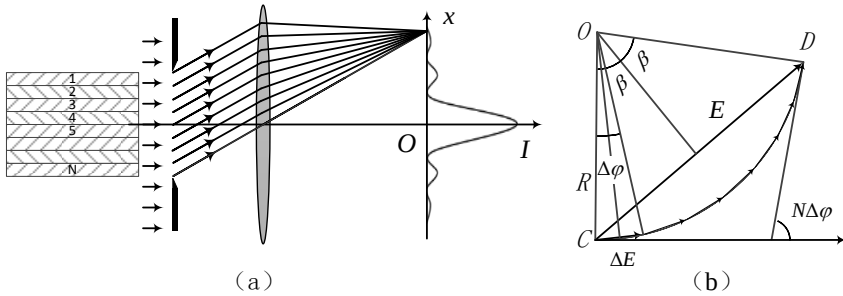


图 18.8 用振幅矢量合成法推导单缝衍射的光强公式

$$\Delta E = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

又因为子波带的数目 N 很大, 使得 $\Delta\varphi$ 非常小, $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\beta}{N}$, 所以可得

$$E = N \Delta E \frac{\sin \beta}{\beta} = E_0 \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (18.10)$$

将上式两边平方, 可得光强为

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (18.11)$$

式中 $E_0 = N\Delta E$ 和 I_0 分别表示中央明条纹中心 O 点的合振幅和光强。

利用光强公式 18.11，可以求出光强极大和极小的条件，即单缝衍射的明暗纹条件。

(1) 中央明纹

当 $\beta = 0$ ，即衍射角 $\theta = 0$ 时， $I = I_0$ ，光强最大，这就是中央明条纹中心的光强。

(2) 暗纹条件

当 $\beta = k\pi$ 时， $I = 0$ ，又因 $\beta = \frac{N\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$ ，所以暗纹条件为

$$a \sin \theta = k\lambda \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots; k \neq 0)$$

(3) 其余各级明纹

令 $\frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = 0$ ，可求得极大值的条件为

$$\tan \beta = \beta$$

这是一个超越方程，通过作图法可求得各极大值对应的 β 值为

$$\beta = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \dots$$

相应地有

$$a \sin \theta = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \dots \quad (18.12)$$

这就是由光强公式得到的明纹条件。通过比较可知，由菲涅尔半波带理论得到的明纹条件：

$a \sin \theta = \pm (2k+1)\lambda/2$ 是一个相当好的近似结果。

§18.3 圆孔衍射 光学仪器的分辨本领

18.3.1 圆孔的夫琅禾费衍射现象

1. 衍射装置与衍射图样——爱里斑

圆孔的夫琅禾费衍射装置及衍射图样如图 18.9 所示。显然这样的衍射图样用几何光学的观点是不可解释的。根据几何光学的观点，单色平行光垂直照射到圆孔后，从圆孔射出来的光还是平行光，经过透镜会聚后将在透镜的焦平面上形成一个几何亮点，但现在我们看到的是中央有一个亮斑，周围还有几个明暗相间的同心圆环。这个

中央亮斑称为**爱里斑**，爱里斑内所分布的光能量大约是通过圆孔的总光能量的 84%。因此，在讨论圆孔衍射问题时，我们通常只考虑中央亮斑即爱里斑的大小，并用爱里斑的大小来衡量圆孔衍射现象的显著与否。当爱里斑小到不影响我们的观测或成像质量时，圆孔衍射现象即可忽略不计。

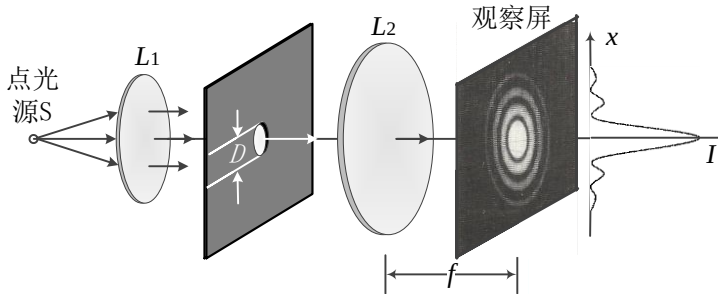


图 18.9 圆孔的夫琅禾费衍射装置 衍射图样及光强分布

2. 爱里斑的直径 θ

我们将圆孔衍射图样中第一暗环所对应的衍射角称为爱里斑的角半径，也就是观察屏上爱里斑的边缘和中心关于透镜中心的夹角，并用 θ_0 表示，如图 18.10 所示。利用圆孔衍射的光强公式，可以证明爱里斑的角半径为

$$\theta_0 = \arcsin\left(0.61\frac{\lambda}{R}\right) \approx 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D} \quad (18.13)$$

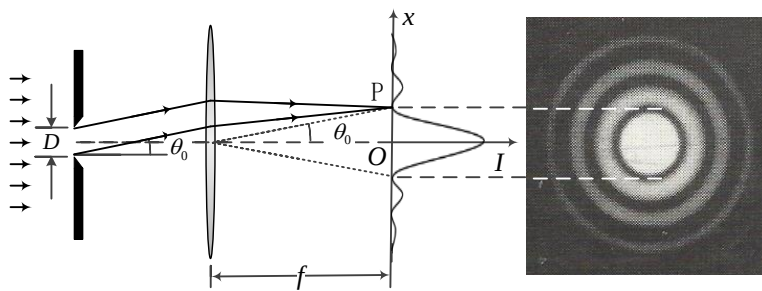


图 18.10 圆孔衍射爱里斑的角半径

式中 R 、 D 分别表示圆孔的半径和直径。若会聚透镜的焦距为 f ，则爱里斑的半径为

$$r_0 = f \tan \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda f}{D} \quad (18.14)$$

式 18.13 和 18.14 表明,爱里斑的大小与入射光的波长 λ 成正比,与圆孔的孔径 D 的大小成反比,此外还与透镜的焦距成正比。对于一个给定的透镜,通光孔径(或光阑的直径) D 越小,波长越大,则爱里斑越大,圆孔衍射现象越明显。

18.3.2 光学成像仪器的最小分辨角和分辨本领

大多数光学成像仪器所用的透镜或光阑都是圆形的。因此当一个点光源发出的光通过透镜成像时,由于衍射现象,在透镜的焦平面(或像平面)上得到的像不再是一个理想的几何像点,而是一个有一定大小的衍射斑,在大多数情况下这个衍射斑可以看成是爱里斑。

通常,两个独立的发光点发出的光是不相干的。假设这两个点物发出的光强度相同,若两个爱里斑相距比较远,则可以区分这两个像点,如图 18.11 (a) 所示。若他们靠的比較近,则两个爱里斑非相干叠加的结果就有可能无法区分这两个像点,如图 18.11 (b) 所示。那么,什么情况下两个爱里斑恰好可以被分辨呢?

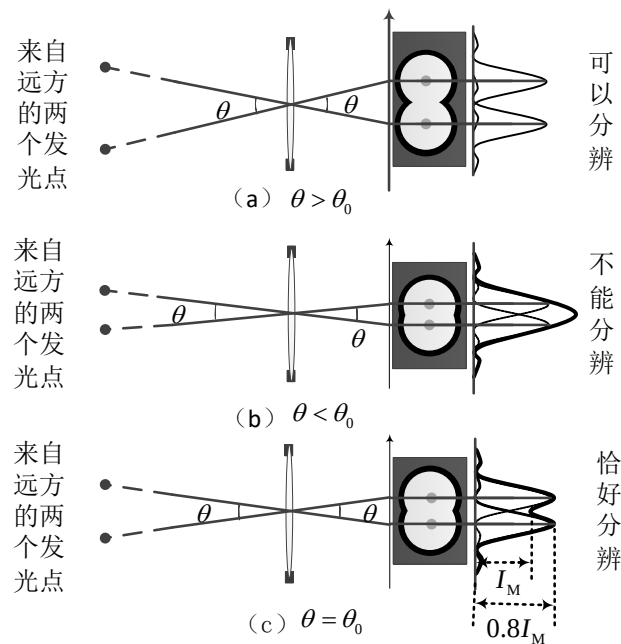


图 18.11 光学仪器的最小分辨角 瑞利判据

为此，瑞利提出了一个判断标准，即两个亮度相同的点物形成的爱里斑，当其中一个爱里斑的中心恰好位于另一个爱里斑的边缘时，这两个爱里斑恰好可以被分辨，如图 18.11 (c) 所示，这称为**瑞利判据**。此时在两个爱里斑叠加后得到的光强分布曲线上，中央极小处的光强等于上下两个极大值的 80%。

当两个点物所形成的像恰好能被分辨时，两个点物对透镜中心的夹角称为该光学仪器的最小分辨角，并用 $\delta\varphi$ 来表示。由图 18.11 (c) 可知，光学仪器的最小分辨角就等于爱里斑的角半径 θ_0 ，即

$$\delta\varphi = \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (18.15)$$

最小分辨角的倒数 $\frac{1}{\delta\varphi}$ 称为光学仪器的分辨本领，常用 R (resolution) 表示

$$R = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{D}{1.22\lambda} \quad (18.16)$$

式中 D 是光学仪器的镜头（通常是指物镜）直径或光阑的直径。式 18.16 表明，光学仪器的分辨本领与镜头的直径成正比，与入射光的波长成反比。因此要提高光学仪器的分辨本领通常可以有两种方法：一是增大物镜的直径，二是减小入射光的波长。显然，对于照相机、望远镜等光学仪器来说，提高分辨本领的有效方法就是增大物镜的直径。



图 18.12 哈勃望远镜

1990 年发射的哈勃太空望远镜的凹面物镜的直径达到了 2.4m，最小分辨角约为 $0.1''$ （角度：秒）。它在大气层外 615km 高空绕地运行，采用计算机图像处理技术，把图像资料传回地球，可观测 130 亿光年远的太空深处。

对于显微镜，它的分辨本领用两物点间的最小分辨距离来表示，通常光学显微镜的最小分辨距离约为照明光波波长的一半（参见下节 18.3.3 显微镜的分辨本领）。可见光的最小波长为 400nm，所以光学显微镜的最小分辨距离约为 200nm，这是光学显微镜的分辨极限。根据量子力学理论，电子具有波动性，在 10kV 加速电压的作用下，电子波的波长约为 0.12nm，所以利用电子的波动性制作的电子显微镜具有极高的分

辨本领，可以比光学显微镜提高千倍左右，其最小分辨距离可达到 $0.2 \sim 0.3\text{nm}$ 。1981 年，IBM 公司的葛·宾尼（G.Binning）和海·罗雷尔（H.Rohrer）研制了世界上第一台扫描隧道显微镜（Scanning Tunneling Microscope），简称 STM，极大提高了观测灵敏度，其横向分辨率达到 0.01nm ，纵向分辨率达到 0.001nm ，比传统的电子显微镜提高了两个数量级。宾尼和罗雷尔“因为在扫描隧道显微镜方面所作出的开拓性工作”，分享了 1986 年度诺贝尔物理学奖金的一半，另一半奖金则由“因为研制电子显微镜及在电子光学方面所作出的开拓性贡献”的德国科学家鲁卡斯（E.Rucka）获得。

*18.3.3 显微镜的分辨本领

显微镜的成像光路如图 18.13 所示。图中， L_1 是显微镜的物镜，其作用是将微小的物体放大并保证成像质量，物镜还决定了显微镜的分辨本领； L_2 是目镜，它由两片平凸透镜组成，其作用是将物镜放大后的像再进行视角放大。

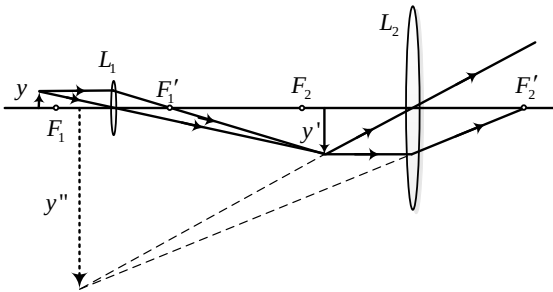


图 19.13 显微镜的成像光路图

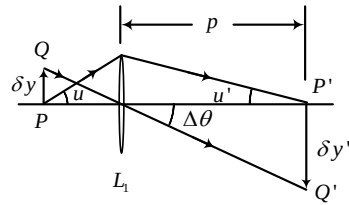


图 18.14 显微镜的分辨本领

显微镜的分辨本领不是用最小分辨角而是用两物点间的最小分辨距离 δy 来衡量，如图 18.14 所示。在显微镜中，由于物体离物镜很近，所以此时已经不是夫琅禾费衍射，而是菲涅尔衍射，但是像面上各爱里斑的角半径仍然可以用 $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ 来计算，式中 D 是显微镜物镜的孔径。所以像面上爱里斑的半径为： $r_0 = p \cdot \theta_0 = 1.22 p \frac{\lambda}{D}$ ，式中 p 为物镜成像时的像距。当两个点物 P 、 Q 对应的像 P' 、 Q' 之间的距离满足：

$$\delta y' = r_0 = 1.22 p \frac{\lambda}{D}$$

时，根据瑞利判据， P 、 Q 两点恰好可以被分辨。

对于显微镜成像，重要的是要考虑校正色差，因此物镜成像时需要满足阿贝正弦条件，即

$$\delta y \cdot n \sin u = \delta y' \cdot n' \sin u'$$

式中 n 、 n' 分别为物方和像方的折射率，且像方为空气 $n'=1$ 。此外，待观测的物体通常离物镜很近，所以 u 很大， u' 很小， $\sin u' \approx \frac{D/2}{p} = \frac{D}{2p}$ 。由此可得两个恰好能被分辨的点物之间的距离为

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u} \quad (18.17)$$

式中 $n \sin u$ 称为物镜的数值孔径，用 N.A. 表示。它是物镜的一个重要指标，出厂时已经在物镜上标出。

提高显微镜的分辨本领的方法之一是增大物镜的数值孔径，如利用油浸物镜增大 n 和 u 值。通常情况下，显微镜物镜和标本之间的介质是空气（称为干物镜），如图 18.15 (a) 所示。它的数值孔径 $n \sin u$ 最大只能达到 0.95，这是因为自 P 点发出的光束到达盖玻片与空气界面时，部分光线因为折射、全反射不能进入物镜，因此进入物镜的光束锥角比较小，它的数值孔径 $n \sin u$ 也比较小。如果在物镜与盖玻片之间滴入折射率较大的透明物体，如香柏油（ $n=1.5$ ），可将物镜的数值孔径 $n \sin u$ 增大到 1.5，这样的物镜称为油浸物镜，如图 18.15 (b) 所示。油浸物镜不仅提高了显微镜的分辨本领，而且避免全反射的产生，增强了像的亮度。

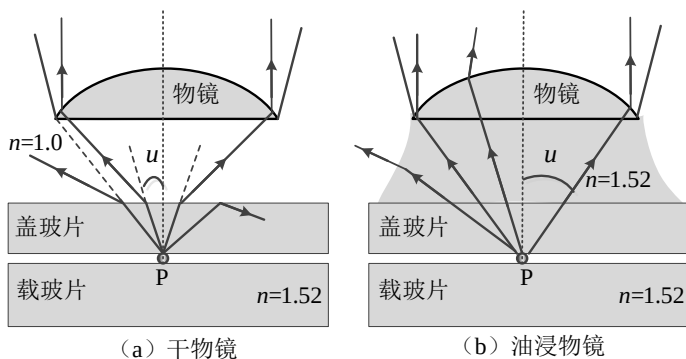


图 18.15 干物镜和油浸物镜

但即使采用油浸物镜，普通光学显微镜的数值孔径最大也只能达到 1.5，所以普通光学显微镜的分辨本领有个极限，即

$$\delta y \geq \frac{0.6}{1.5} \lambda \approx 0.4\lambda$$

所以说光学显微镜的分辨本领不小于照明光波的半个波长。

提高显微镜分辨本领的另一种方法是减小照射光波的波长。例如，用数值孔径为 1.5 的油浸物

镜，用可见光照明（平均波长为 550nm ）时，显微镜能分辨的最小距离为

$$\delta y = \frac{0.61 \times 550}{1.5} = 224(\text{nm})$$

比 224nm 更小的细节就看不清楚了。若改用波长为 275nm 的紫外光作为光源，可使分辨本领提高一倍，最小可分辨距离为 112nm 。

例题 18.2 一台照像机的镜头直径为 $D = 4.00\text{cm}$ ，焦距为 $f = 7.50\text{cm}$ 。假设入射光的波长 $\lambda = 550\text{nm}$ ，不考虑成像透镜的像差因素。

(1) 试通过计算分析：在照相机的像平面（可视为焦平面）上能否区分镜头前方 $L = 1000\text{m}$ 处，相距 $d = 1.00\text{cm}$ 的两个发光点；

(2) 在该相机的像平面（可视为焦平面）上每毫米内最多能区分多少个像素（即最多能区分多少个爱里斑）？

解：(1) 因为该相机的最小分辨角为

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{4.00 \times 10^{-2}} = 1.68 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

而两点物对于透镜中心的夹角为

$$\delta = d/L = 1.00 \times 10^{-2} / 1000 = 1.00 \times 10^{-5} \text{ rad} < \delta\varphi$$

所以，在相机的像平面上无法区分这两个发光点。

(2) 在相机的像平面上两个恰好能分辨的两个爱里斑之间的最小距离等于爱里斑的半径，即

$$\Delta x = f \cdot \delta\varphi = 7.50 \times 1.68 \times 10^{-5} \text{ cm} = 1.26 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

所以每毫米内最多能分辨的像素（即爱里斑）的数目为：

$$N = 1/\Delta x = 794 \text{ 个/mm}$$

例题 18.3 图 18.16 是人眼眼球构造示意图。图中的晶状体相当于一个透镜，瞳孔相当于光阑，瞳孔的直径可以由虹膜来改变，一般在 $2 \sim 8\text{mm}$ 内变化，以控制进入人眼的光通量。在明亮的教室内，假设瞳孔

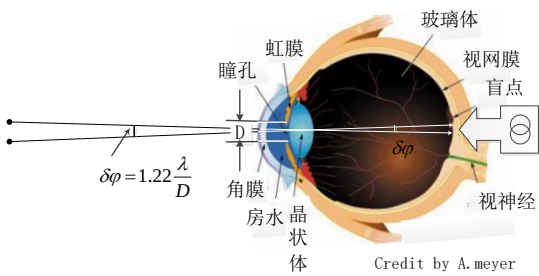


图 18.16 例 18.3 图

的直径 $D = 3.0\text{mm}$ ，取波长 $\lambda = 550\text{nm}$ 。试求：

- (1) 在明视距离（25 cm）处，人眼可分辨的两点物之间的最小距离；
- (2) 在 9 m 远处，人眼可分辨的两个点物之间的最小距离。

解：（1）因为人眼的最小分辨角为

$$\delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{3.00 \times 10^{-3}} = 2.24 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 1'$$

所以在明视距离处，可分辨的两个点物之间的最小距离为

$$\Delta x = L \cdot \delta\varphi = 250 \times 2.24 \times 10^{-4} \text{ mm} = 5.6 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

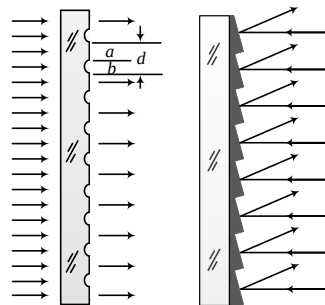
- (2) 在 9 m 远处，人眼可分辨的两个点物之将的最小距离为

$$\Delta x' = L' \cdot \delta\varphi = 9.0 \times 10^3 \times 2.24 \times 10^{-4} \text{ mm} \approx 2.0 \text{ mm}$$

§ 18.4 光栅衍射

18.4.1 光栅及其分类

一般来说，具有空间周期性排列的衍射屏都称为**衍射光栅**（diffraction grating）。最常见光栅是由许多等宽、等距的平行狭缝所组成的光学元件。例如在一块很平的玻璃上用金刚石刀或电子束刻出大量等宽、等距的平行刻痕，有刻痕处相当于毛玻璃基本不透光，无刻痕处相当于透光的狭缝，就成了透射光栅，如图 18.17（a）所示；在玻璃基底表面先镀一层反射率很高的金属膜，然后用特殊形状的刻刀刻出大量平行等距的锯齿状刻槽就成了反射光栅（或称为闪耀光栅），每个刻槽相当于一个狭缝如图 18.17（b）所示。



(a) 透射光栅 (b) 闪耀光栅

图 18.17 透射光栅和闪耀光栅

光栅的种类有很多。按光是透射还是反射来分，可分为透射光栅和反射光栅（即闪耀光栅）；按透射率函数形式来分可分为矩形光栅和正弦光栅，如图 18.18；按光栅的空间结构来分可分为一维光栅、二维光栅和三维光栅。当然还有其它分类方法，在此不作详细讨论。

这里我们将主要讨论一维透射矩形光栅的衍射图样。在一维透射光栅中，透明部分常被称作狭缝，其宽度用 a 表示，不透明部分的宽度用 b 表示，相邻两狭缝之间的距离称为光栅常数，用 d 表示，参见图 18.17 (a) 或图 18.18 (a)。显然

$$d = a + b \tag{18.18}$$

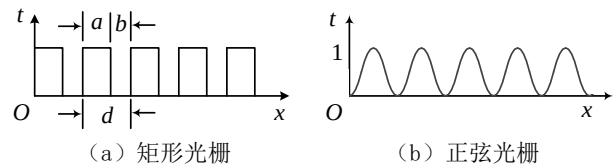


图 18.18 矩形光栅和透射光栅

光栅单位长度内的狭缝数 $N = 1/d$ ，光栅常数 d 的数量级约为 $10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ mm}$ 。例如，一块每毫米内有 500 条透光狭缝的光栅，其光栅常数 $d = (1/500) \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

18.4.2 从单缝衍射到多缝衍射的定性分析 光栅方程

将单缝夫琅禾费衍射装置中的单缝换成光栅就成了光栅衍射装置，如图 18.19 所示。

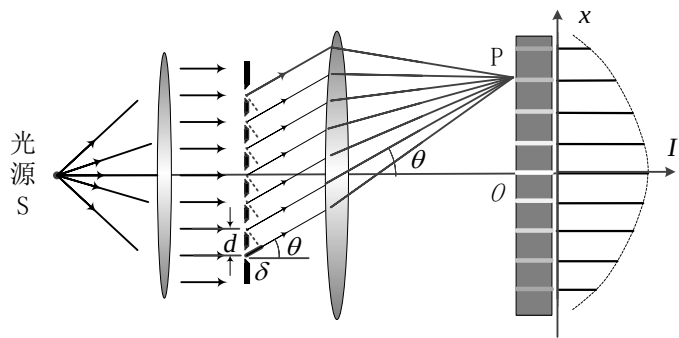


图 18.19 光栅衍射

为了弄清楚光栅衍射条纹是如何形成的，我们首先来看如果（图 18.19 中）衍射屏上只有一个狭缝，显然此时观察屏上将会出现单缝的夫琅禾费衍射图案。而且只要保持狭缝的宽度不变，当狭缝在衍射屏上上下平移时，观察屏上的衍射图样完全不变，即不仅光强分布相同，而且图案位置也完全相同（这是因为狭缝宽度不变时，各级明暗条纹的衍射角不变，又同一衍射角的光线经透镜折射后都聚焦于同一点），即在图 18.19 中，光栅上的每一个狭缝单独透光时，每个狭缝所产生的单缝衍射图样不仅光

强分布完全相同、而且在空间上完全重叠。

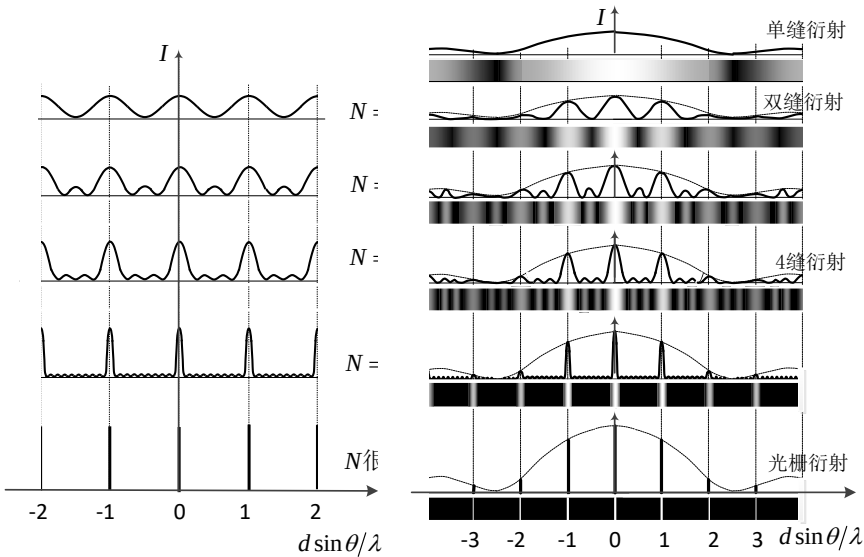
如果屏上只有两个狭缝透光，由于这两束光满足相干条件，于是两个在空间上完全重叠的光斑就要产生双缝干涉现象，不过这种干涉图要受到单缝衍射的光强分布的影响，所以实际上称为双缝衍射。其衍射图样如图 18.20（b）所示。根据双光束干涉理论，当两束光的光程差 δ 满足

$$\delta = d \sin \theta = \pm k \lambda \tag{18.19a}$$

或

$$(a + b) \sin \theta = \pm k \lambda \tag{18.19b}$$

时，出现双缝干涉明条纹。式中 θ 是衍射角， d 是双缝间距。当狭缝的数目很多时，就成了光栅衍射。不难看出只要衍射角 θ 满足式（18.19），则所有狭缝发出的衍射光线在 P 点相遇时都将满足相长干涉条件，所以式（18.19）是光栅衍射出现明条纹的必要条件，称为**光栅方程**。 $k = 0$ 对应的明条纹称为光栅衍射的中央明条纹， $k = 1、2、\cdots$ 时的明条纹称为第 1 级、第 2 级、……明条纹。图 18.20（b）分别该出了不同狭缝数时，多缝衍射图案及光强分布。当缝的数目很大时，就称为光栅衍射。



(a) N 条无限细狭缝的缝间干涉 (b) N 条有宽度狭缝的多缝衍射

图 18.20 从单缝衍射到光栅衍射

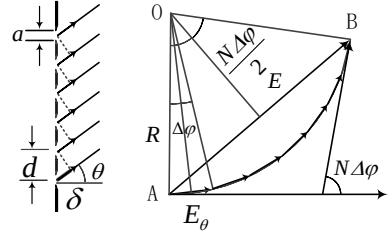
*18.4.3 光栅衍射的光强分布公式

1. 光强分布公式

利用振幅矢量叠加方法，可以求出光栅衍射的光强分布公式。假设每个狭缝单独透光时在 P 点产生的光振动振幅为 E_θ ，又相邻两个狭缝发出的光波在 P 点的光程差和相位差分别为（参见图 18.19）

$$\delta = d \sin \theta$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$



(a) 光程差 (b) 合振幅

图 18.21 光栅衍射中缝间干涉的计算

由于 P 点总的光振动是所有狭缝发出的光波在 P 点相干叠加的结果。为此我们可以让 N 个大小均为 E_θ 的矢量首位相连，相邻两个矢量之间的夹角均为 $\Delta\varphi$ ，画出一个正多边形，如图 18.21 所示。该正多边形所对应的外接圆的半径 R 与合矢量 E 的大小之间的满足

$$\frac{E}{2} = R \sin \frac{N\Delta\varphi}{2} = R \sin(Nu)$$

式中 $u = \Delta\varphi/2$ ，又 $E_\theta = 2R \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$ ，所以 P 点光振动的合振幅为

$$E = E_\theta \frac{\sin Nu}{\sin u} \quad (18.20)$$

考虑到单个狭缝提供的光振幅 E_θ 与衍射角 θ 有关，由式 18.10 确定，即 $E_\theta = E_0 \frac{\sin \beta}{\beta}$ ，

式中 $\beta = a \sin \theta$ ，再将 E_θ 带入式 (18.20)，可得

$$E = E_0 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin Nu}{\sin u} \quad (18.21)$$

从而 P 点的光强为

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin Nu}{\sin u} \right)^2 \quad (18.22)$$

上式就是光栅衍射的光强分布公式。式中 I_0 是一个狭缝单独透光时在屏上中心点 O

处产生的光强， $\left(\frac{\sin Nu}{\sin u}\right)^2$ 称为缝间干涉因子， $\left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$ 称为单缝衍射因子。

2. 对光强分布的讨论

式 (18.22) 表明，光栅衍射的光强分布是由缝间干涉和单缝衍射共同决定的。在单缝衍射一节中,我们已经讨论了单缝衍射的光强分布特点。下面将只分析缝间干涉因子 $\left(\frac{\sin Nu}{\sin u}\right)^2$ 的光强分布特点。

(1) 当 $u = \pm k\pi$ ，即

$$d \sin \theta = \pm k\lambda \quad \text{或} \quad (a + b) \sin \theta = \pm k\lambda \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18.23)$$

时，光强取得极大值 $I = N^2 I_0$ 。这是多缝干涉、也就是光栅衍射取得主极大（出现明条纹）的必要条件。式 (18.23) 就是**光栅方程**。显然当衍射角 θ 满足光栅方程时，各狭缝发出的光在屏上 P 点相遇时均满足相长干涉条件，所以主极大的光强是单个缝在该处的光强的 N^2 倍。

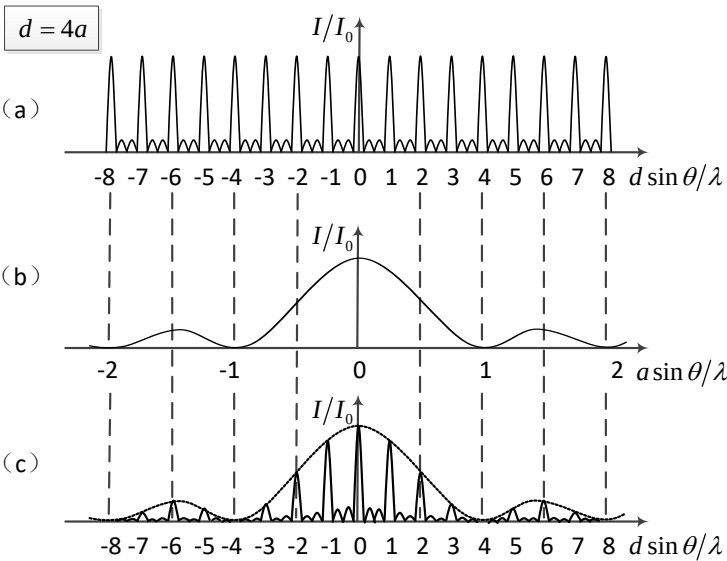


图 18.22 光栅衍射的光强分布曲线

(2) 当 $u = \pm(k + k'/N)\pi$, 即

$$d \sin \theta = \pm \left(k + \frac{k'}{N} \right) \lambda, \quad k' = 1, 2, 3, \dots, (N-1) \quad (18.24)$$

时, 光强为零。可见在两个主极大之间有 $N-1$ 个极小。又在两个相邻的极小之间还有一个次极大, 所以在两个主极大之间有 $N-2$ 个次极大。可以证明, 当 N 很大时, 次极大的光强可以忽略不计。所以在实际的光栅衍射中, 我们只考虑(观测)光栅衍射的主极大。

图 18.22 给出了狭缝数 $N = 4$, 缝间距和缝宽之比 $d/a = 4$ 的光栅衍射光强分解图, 图中 (a) 是多缝干涉的光强分布, (b) 是单缝衍射的光强分布, (c) 是光栅衍射的光强分布。由图也可看出, 当 $N = 4$ 时, 相邻的两个主极大之间有 3 个极小, 2 个次极大。

18.4.4 缺级现象

由光栅衍射的光强分布曲线图 18.22 (c) 可以看出, 如果衍射角 θ 同时满足光栅方程和单缝衍射的暗纹条件, 即

$$d \sin \theta = \pm k \lambda \quad \text{和} \quad a \sin \theta = \pm k' \lambda$$

则第 k 级光栅衍射明条纹将消失。这种由于单缝衍射的影响, 使光栅衍射的某些明条纹缺失的现象, 称为光栅衍射的**缺级现象**。不难看出, 缺失的明纹级数一定满足:

$$k = \frac{d}{a} k' = \frac{a+b}{a} k' \quad \text{其中 } k' = 1, 2, 3, \dots \quad (18.25)$$

式 (18.25) 称为光栅衍射的**缺级条件**。即满足上述条件的第 k 级光栅衍射的明条纹缺失。例如, 在图 18.22 中, 因为 $d/a = 4$, 所以第 ± 4 、 ± 8 、 $\dots$ 均缺级。此外, 有些光栅 d/a 未必是整数, 但只要满足 k' 为整数时, k 也是整数, 也会发生缺级现象。例如: 当 $d/a = 3/2$, 则当 $k' = 2, 4, 6, \dots$ 时, $k = 3, 6, 9, \dots$, 即 ± 3 、 ± 6 、 $\pm 9 \dots$ 级也发生缺级。

例题 18.4 某光栅的刻线密度为每厘米 3000 线, 在用波长为 λ 的单色光垂直入

射时,测得第一级主极大的衍射角为 $\theta_1 = 10^\circ 11'$,已知透镜的焦距 $f = 30.0\text{cm}$ 。试求:

(1) 入射单色光的波长 λ ; (2) 观察屏上第一级谱线到第二级谱线的距离。

解: (1) 由题意可知,光栅常数为: $d = 1/3000\text{ cm} = 3.333 \times 10^{-3}\text{ mm}$

由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$, 可得

$$\lambda = d \sin \theta_1 = 3.333 \times 10^{-3} \times \sin 10^\circ 11' = 5.893 \times 10^{-4}\text{ mm}$$

(2) 因为第二级谱线的衍射角为

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{2 \times 5.893 \times 10^{-4}}{3.333 \times 10^{-3}}\right) = 20^\circ 42'$$

所以第 1、2 级谱线之间的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = f(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \\ &= 300 \times (\tan 20^\circ 42' - \tan 10^\circ 11')\text{ mm} = 59.5\text{ mm} \end{aligned}$$

例题 18.5 波长 $\lambda = 600\text{nm}$ 的单色光垂直入射到光栅上,实验测得第二级主极大的衍射角为: $\theta_2 = 11^\circ 32'$,第 3 级缺级。试求:

(1) 光栅常数;

(2) 光栅上每个透光缝的最小可能宽度;

(3) 在上述条件下,光栅后最多可出现几条光栅衍射的明条纹?

解: (1) 由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$, 可知:

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \theta} = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{\sin 11^\circ 32'}\text{ m} = 6.00 \times 10^{-6}\text{ m}$$

(2) 由于第三级缺级,所以第三级对应的衍射角 θ_3 一定同时满足

$$d \sin \theta_3 = \pm 3\lambda \text{ 和 } a \sin \theta_3 = \pm k'\lambda$$

由此得:

$$a = \frac{d}{3}k' \quad \text{其中 } k' = 1, 2$$

当 $k' = 1$ 时,可得透光缝的最小可能宽度为

$$a = d/3 = 2.00 \times 10^{-6}\text{ m}$$

(3) 由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$ 可知,光栅衍射中可能出现的明条纹的最高级次为

$$k_{\max} < d \sin 90^\circ / \lambda = 10$$

同时考虑到第 3、6、9 级缺级，所以实际上只能出现 0、 ± 1 、 ± 2 、 ± 4 、 ± 5 、 ± 7 、 ± 8 ，共 13 条光栅衍射明条纹。

例题 18.6 一衍射光栅，每厘米内有 200 条透光狭缝，每条透光缝的宽度为 $a = 2.00 \times 10^{-3} \text{ cm}$ ，在光栅后放一焦距 $f = 1.00 \text{ m}$ 的凸透镜。现以 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的单色平行光垂直照射光栅，试求：

- (1) 透光缝 a 的单缝衍射中央明条纹的宽度；
- (2) 在该宽度内，有几个光栅衍射的主极大？

解：(1) 由单缝衍射的暗纹条件 $a \sin \theta = k' \lambda$ ，可得第一级暗纹的衍射角为

$$\theta_{\pm 1} = \arcsin(\pm \lambda / a) \approx \pm \lambda / a = \pm 3.00 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

所以单缝衍射中央明条纹的宽度为

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{中央}} &= x - x_1 \approx f \alpha \approx 2f \\ &= 2 \times 1.00 \times 3.00 \times 10^{-2} \text{ m} = 6.00 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

- (2) 由题意可知，光栅的光栅常数为

$$d = 1/200 \text{ cm} = 5.00 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

所以由光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$ 可知，在单缝衍射第一暗纹所出现的方向上，光栅衍射的主极大的级次为

$$k = \frac{d \sin \theta_1}{\lambda} = \frac{d \cdot \lambda / a}{\lambda} = \frac{d}{a} = 2.5$$

因为 k 只能取整数，所以在单缝衍射中央明条纹的范围内，将有 0、 ± 1 、 ± 2 共 5 个主极大，如图 18.23 所示。

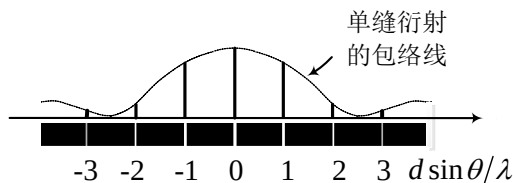


图 18.23 例题 19.6 图

18.5.6 光栅光谱

由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$ 可知，当光栅常数 d 一定时，对于不同波长的光，除零级（ $k=0$ ）外，各级主极大对应的衍射角都与波长有关，在同一级次上，波长大的衍射角大。因此，用白光照射时，衍射图样中除了中央明条纹（即 0 级明条纹）仍然是白色条纹之外，两侧其它的各级明纹均按波长的大小由小到大依次排列，相应的颜色将由紫到红依次展开，形成一系列彩色谱带，这称为光栅光谱。如图 18.24 所示。

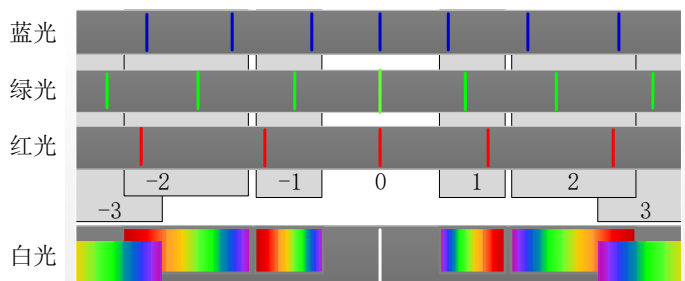


图 18.24 光栅光谱

值得注意的是，在白光的栅光谱中，只有第一级光谱是独立的，第二级以后的各级光谱之间都有相互重叠现象，谱线级次越高，重叠越厉害。

例题 18.7 一平面透射光栅 1mm 内有 500 条透光狭缝，透镜的焦距为 1.00m，用白光作光源，当用白光垂直入射时，试求：

- (1) 对于白光中 $\lambda = 500\text{nm}$ 的绿光，最多能看到第几级光谱；
- (2) 屏幕上第一级白光光谱的线宽度；

解：(1) 由题意知，光栅常数为

$$d = 1/500\text{mm} = 2 \times 10^{-3}\text{mm}$$

再由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$ ，当 $\theta = 90^\circ$ 时，得光栅衍射的最大级次为

$$k_{\max} < d \sin 90^\circ / \lambda = 2 \times 10^{-3} / 500 \times 10^{-6} = 4$$

所以，最多能看到第 3 级光谱线（在 $\theta = 90^\circ$ 处的第 4 级谱线实际上看不到）

(2) 白光的波长范围为 $400 \sim 760\text{nm}$ ，取 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ ， $\lambda_2 = 760\text{nm}$ ，则它们所对应的第 1 级谱线的衍射角分别为

$$\theta_{11} = \arcsin(\lambda_1/d) = \arcsin \frac{400 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}} = 11^\circ 32'$$

$$\theta_{12} = \arcsin(\lambda_2/d) = \arcsin \frac{760 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}} = 22^\circ 20'$$

所以第一级白光光谱的线宽度为

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_{12} - x_{11} = f \tan \theta_{12} - f \tan \theta_{11} \\ &= 1.00 \times (\tan 22^\circ 20' - \tan 11^\circ 32')(\text{m}) = 0.207 \text{ m} \end{aligned}$$

例题 18.8 用氢灯发出的光垂直照射到一块衍射光栅上。实验发现，在衍射角 $\theta = 41^\circ$ 处，波长分别为 $\lambda_1 = 410.2 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 653.3 \text{ nm}$ 的两条谱线发生重合。试求：在重合处这两条谱线所对应的（最低）衍射级次和光栅常数。

解：设两条对应的衍射级次分别为 k_1 和 k_2 ，则由题意可知

$$d \sin \theta = k_1 \lambda_1 \quad \text{及} \quad d \sin \theta = k_2 \lambda_2$$

由此得

$$k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$$

即

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{653.3}{410.2} = \frac{8}{5}$$

所以与 $\lambda_1 = 410.2 \text{ nm}$ 对应的是第 8 级，与 $\lambda_2 = 653.3 \text{ nm}$ 对应的是第 5 级。光栅常数为

$$d = \frac{k \lambda}{\sin \theta} = \frac{8 \times 410.2}{\sin 41^\circ} (\text{nm}) = 5.00 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

*18.4.6 光栅衍射主极大的半角宽度

由光栅衍射的光强分布（见图 18.19 及图 18.21）可知，随着光栅上狭缝数 N 的增加，光栅衍射主极大的宽度越来越小，所以明条纹越来越细。假设第 k 级主极大的衍射角为 θ_k ，其外侧第一个暗条纹的衍射角为 $\theta_k + \Delta\theta$ ，则 $\Delta\theta$ 称为第 k 级主极大的半角宽度。由式（18.23）和式（18.24）可知

$$d \sin \theta_k = k \lambda$$

$$d \sin(\theta_k + \Delta\theta) = \pm \left(k + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

两式相减，可得

$$d \sin \theta_k \cos \Delta \theta + d \cos \theta_k \sin \Delta \theta - d \sin \theta_k = \frac{1}{N} \lambda$$

又 $\Delta \theta$ 很小，故可认为 $\cos \Delta \theta = 1$ ， $\sin \Delta \theta = \Delta \theta$ ，于是得第 k 级主极大的半角宽度为

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_k} \quad (18.26)$$

上式再次表明，光栅的狭缝数 N 越多，光栅衍射主极大的宽度就越小，即明条纹越细。

*18.4.7 光栅的角色散和分辨本领

1. 光栅的色散

由光栅光谱一节的分析可知，用白光（即复色光）照射光栅后，得到的衍射图将按波长的大小分开排列，这称为光栅的**色散**。通常我们用**角色散率**或**线色散率**表示光栅对不同波长的谱线分开的程度。角色散率是指波长相差 1nm 的两条谱线之间的角距离，即 $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}$ 。线色散率是指波长相差 1nm 的两条谱线之间的在观察屏上（透

镜焦平面上）被分开的距离，即 $D_x = \frac{dx}{d\lambda}$ 。因 $dx = f \cdot d\theta$ ，所以两者的关系为

$$D_x = f \cdot D_\theta = f \frac{d\theta}{d\lambda}$$

由光栅方程 $d \sin \theta = k\lambda$ ，可得： $d \cos \theta d\theta = k d\lambda$ ，所以光栅的角色散率为：

$$D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \theta} \quad (\text{rad} \cdot \text{nm}^{-1}) \quad (18.27)$$

线色散率为

$$D_x = f \frac{d\theta}{d\lambda} = f \frac{k}{d \cos \theta} \quad (\text{mm} \cdot \text{nm}^{-1}) \quad (18.28)$$

从式（18.27）和式（18.28）式可以看出，光栅常数 d 越小，光栅的色散越大，而且随着谱线级次 k 的增高而增大，此外增大透镜的焦距，也可以提高光栅的线色散率。

2 光栅的分辨本领

光栅的分辨本领是指它对两个波长很近的谱线的分辨能力。因为谱线有一定的宽度，当两个波长很近的光照射光栅时，他们的谱线将有部分重叠。按照瑞利判据，当一个波长的主极大恰好与另一个波长的第一极小重合时，这两条谱线恰好能够被分辨。如图 18.25 所示。如果这两条谱线再靠近一些，将无法分辨。由图 18.25 可知，恰好能够分辨时的角距离就等于这两条谱线的半角宽度。

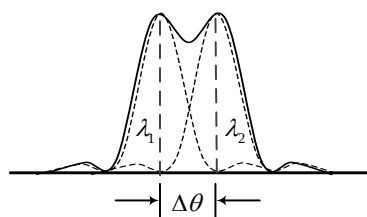


图 18.25 光栅的分辨本领

将光栅方程 $d \sin \theta = k \lambda$ 两边同时取微分可得

$$d \cos \theta d\theta = k d\lambda$$

则与最小可分辨角 $\Delta \theta$ 对应的两谱线的波长差 $\Delta \lambda$ 为

$$\Delta \lambda = \frac{d \cos \theta}{k} \Delta \theta$$

再将由式 (18.26) 给出的谱线半角宽度 $\Delta \theta$ 代入上式，可得光栅恰好可分辨的两谱线的波长差为：

$$\Delta \lambda = \frac{d \cos \theta}{k} \cdot \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{\lambda}{kN} \quad (18.29)$$

我们定义： $\frac{\lambda}{\Delta \lambda}$ 为光栅的**分辨本领**，并用 A 表示，则

图 18.25 光栅的分辨本领

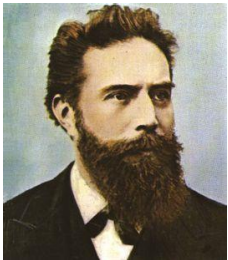
$$A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN \quad (18.30)$$

式 (18.30) 表明，光栅的狭缝数越多，光栅的分辨本领越大；在越高的谱线级次上，光栅的分辨本领越大。

§ 18.5 X 射线的衍射

18.5.1 X 射线的衍射

1895 年 11 月 8 日，时为德国维尔茨堡大学校长的伦琴（Roentgen，1845-1923）在进行阴极射线的实验时第一次注意到放在射线管附近的氰亚铂酸钡小屏上发出微光。经过几天废寝忘食的研究，他确定荧光屏的发光是由于阴极射线管中发出了某种射线所致，同时他还发现这种射线具有很强的穿透本领，还能使胶片感光。因为当时对于这种射线的本质和属性还不了解，所以他称它为 X 射线。为了纪念伦琴的发现，人们又称它为伦琴射线。1901 年，伦琴也因此获得了首届诺贝尔物理学奖。



伦琴

X 射线由 X 射线管产生。图 18.26 是 X 射线管的结构原理图。在真空管中密封着一个阴极 K 和一个阳极 P，又叫靶。在两极之间接有几万致几十万伏的直流电压。当电子从阴极发出后，经过强电场的作用，高速撞击阳极（金属靶）时，金属靶上就会发出 X 射线。

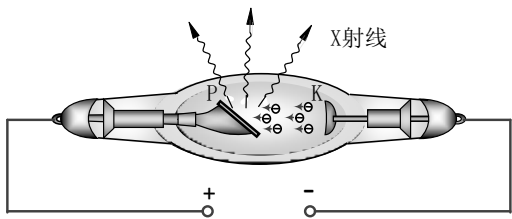
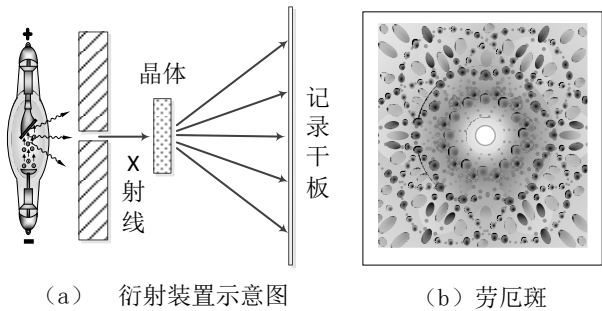


图 18.26 X 射线管示意图



(a) 衍射装置示意图

(b) 劳厄斑

图 18.27 晶体对 X 射线的

自伦琴发现 X 射线后，许多物理学家都在积极地研究和探索 X 射线的性质，但对 X 射线究竟是一种电磁波还是微粒辐射，仍不清楚。直到 1912 年德国物理学家劳

厄设想 X 射线是极短的电磁波，而晶体又是原子（离子）的有规则的三维排列，只要 X 射线的波长和晶体中原子（离子）的间距具有相同的数量级，那么当用 X 射线照射晶体时就应能观察到干涉现象。很快，劳厄的设想得到了实验证实。两位青年科学工作者（索末菲的助手和伦琴的博士生）让 X 射线通过铅板上的一个小孔，再射到晶体上，在晶体后面放一个照相底片，如图 18.27（a）所示，果然在照相底片上出现了有规则的斑点群，称为劳厄斑。劳厄设想的实验验证，直接证明了 X 射线是一种波长很短的电磁波，其波长与晶体中原子间的距离相当，大约为可见光波长的千分之一。由于发现 X 射线在晶体中的衍射现象，劳厄获得了 1914 年的诺贝尔物理学奖。

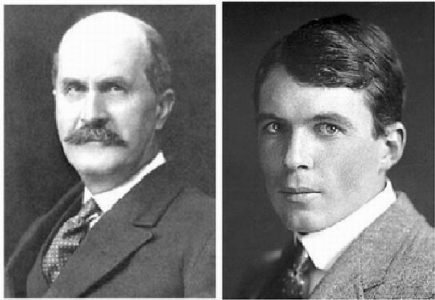
18.5.2 布拉格公式

劳厄的文章发表不久，就引起英国布拉格父子（威廉·布拉格 W.H.Bragg 和劳伦斯·布拉格 W.L.Bragg）的关注。他们以更简洁的方式，清楚地解释了晶体对 X 射线衍射的形成，并提出了著名的布拉格公式：

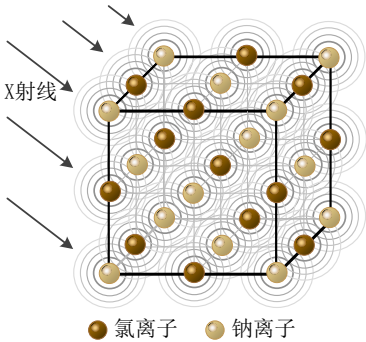
$$2d \sin \theta = k\lambda$$

这一结果不仅正确地解释了晶体对 X 射线的衍射现象，更重要的是证明了能够用 X 射线的衍射来获取晶体结构的信息，开创了用 X 射线的衍射分析晶体结构的新领域。1915 年，年仅 25 岁的劳伦斯·布拉格也因此和他的父亲一起共同分享了当年的诺贝尔物理学奖，同时也成为历史上最年轻的诺贝尔物理学奖得主。

劳伦斯·布拉格认为，晶体可看成由一系列彼此平行的原子层所组成，图 18.28 中给出了氯化钠晶体中原子的点阵模型。当 X 射线照射到晶体上时，按照惠更斯原理，晶体中的每个原子都可以看成是发射子波的波源，向各个方向发出散射波。这些散射波都满足相干条件，它们的相干叠

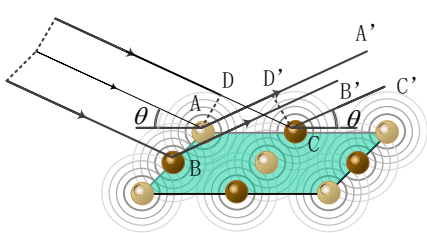


威廉·布拉格（左） 劳伦斯·布拉格（右）

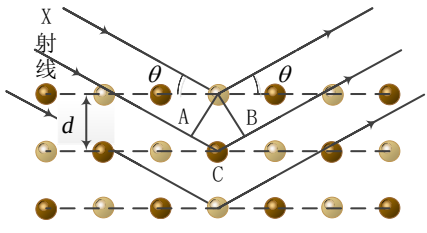


18.28 氯化钠晶体中的原子点阵

加要考虑两种情况，一是同一晶面上各原子发出的子波之间的相干叠加；二是不同晶面上发出的子波之间的叠加。首先考虑在同一层晶面上各原子发出的子波的叠加。如图 18.19 所示。由图可知，AA'和 BB'之间的光程相同，总是能满足相长干涉条件。但是要使 AA'和 CC'之间也要满足相长干涉，必须要求 DC=AD'，即只有在满足镜面反射条件时才能让同一晶面上的所有散射光满足相长干涉条件。



18.29 同一层晶面上各子波的叠加



18.30 不同晶面上个子波的叠加

再来讨论不同晶面间各层原子的散射光的干涉。如图 18.30 所示，假设相邻两层晶面之间的距离为 d ，当 X 射线以掠射角 θ 入射到晶面上时，在满足镜面反射条件下，相邻两层晶面上的原子发出的散射光的光程差为： $AC+CB=2d\sin\theta$ 。如果这些光也满足相长干涉条件，则有：

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad (k=1, 2, 3 \dots) \quad (18.31)$$

这就是 X 射线晶体衍射的布拉格公式。

应该指出，同一块晶体的空间点阵，从不同的方向看去，可以形成多个取向不同、间距不同的晶面族。对于不同的晶面族，掠射角 θ 也不同，但是只要能满足布拉格公式，就能在相应的镜面反射方向得到加强，在照相底板上出现亮斑。对于某个 d 已知的晶面族，如果实验测出了衍射极大时的掠射角 θ ，就能算出 X 射线的波长；反之若已知 X 射线的波长，就能求出晶面间距 d ，从而可以确定晶体中原子的排列，也就能确定晶体的结构。所以说布拉格父子开创了用 X 射线的衍射研究晶体结构的新领域。

现在，用 X 射线的衍射技术分析晶体结构已经成为专门的学科，不仅在纳米材料等领域有着广泛的应用，在生物医学的基础研究中也有重要应用，生物大分子 DNA 的双螺旋结构就是通过分析 X 射线的衍射照片得到的。

思考题

18.1 在日常生活中，为什么机械波如声波、水面波的衍射现象比较容易观察，而光波的衍射现象不容易观察？

18.2 在单缝衍射中，如果保持缝宽和透镜位置不变，仅作如下一些变动，观察屏上的衍射图样有何变化？

- (1) 使单缝向透镜方向作平移；
- (2) 使单缝沿垂直于光轴方向作微小平移；
- (3) 用红光替代蓝光；
- (4) 用点光源代替线光源。

18.3 在单缝衍射中，为什么各级明纹的亮度随明纹级次的增大而减小

18.4 双缝干涉和双缝衍射有什么区别？

18.5 对于光栅，缝宽 a 、光栅常数 d 及缝数 N 这三个参数大小的改变，分别对光栅衍射图样有什么影响？

18.6 光栅光谱和棱镜光谱有何不同？

18.7 为什么不能用普通光栅作 X 射线的衍射实验？

习 题

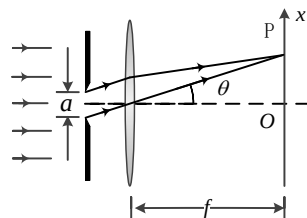
18.8 在单缝衍射装置中，透镜的焦距为 20cm，入射光波长为 546.1nm，当缝宽为 0.10mm 时，试求：

- (1) 观察屏上中央明条纹的宽度；
- (2) 中央明纹两侧，两个第 2 级明纹中心之间的距离。

18.9 在单缝夫琅禾费衍射衍射图样中，测得第一级暗条纹和第五级暗条纹之间的距离为 3.5mm。已知透镜焦距 $f = 40\text{cm}$ ，入射光波长 $\lambda = 550\text{nm}$ ，求单缝的宽度。

18.10 在单缝的夫琅禾费衍射中，单缝宽度 $a = 0.10 \text{ mm}$ 。若波长为 λ_1 的第 2 级明条纹位置恰好与波长为 $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$ 的第 2 级暗条纹位置重合。试求：(1) 波长 λ_1 的数值。(2) 波长为 λ_1 的中央明纹的角宽度 $\Delta\theta_1$ 。

18.11 如图所示，狭缝的宽度 $a = 0.600 \text{ mm}$ ，透镜焦距 $f = 400 \text{ mm}$ 。以单色平行光垂直照射狭缝，在透镜的焦平面上观察单缝衍射条纹，若在屏上离 O 点为 $x = 1.40 \text{ mm}$ 处的 P 点可看到衍射明条纹，试利用半波带理论求：



习题 18.11 图

- (1) 该单色光的波长；
- (2) P 点处明条纹的级数；
- (3) 从 P 点看，对该光波而言，狭缝处的波阵面可分成的半波带的数目。

18.12 迎面而来的汽车的两个车头灯相距 1.22 m ，问在汽车离人多远时，它们刚能被人眼所分辨？设瞳孔直径为 3.0 mm ，假设光在空气中的波长为 550 nm 。

18.13 地球距离月球约为 $3.8 \times 10^8 \text{ m}$ ，若用口径为 0.50 m 的天文望远镜观察月球，假设可见光的平均波长为 550 nm 。试求能分辨月球表面上两点的最小距离是多少？

18.14 一台卡片式数码照像机的镜头直径为 $D = 1.00 \text{ cm}$ ，焦距为 $f = 2.50 \text{ cm}$ 。假设入射光的波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$ ，不考虑成像透镜的像差因素。试求：

- (1) 在照相机前方 10 m 处，能被该相机分辨的两点物之间的最小距离；
- (2) 在相机的像平面（可视为焦平面）上每平方厘米内最多能区分多少个爱里斑？

18.15 一台望远镜物镜的直径为 3.0 cm ，焦距为 20 cm ，假定入射光波长为 $\lambda = 550 \text{ nm}$ ，试求：

- (1) 为满足瑞利判据，两个遥远的点状物体必须有多大的角距离？
- (2) 在透镜焦平面上，两个恰好可以被分辨的衍射图样的中心相距多远？

18.16 为了测定一块光栅的光栅常数，用 632.8 nm 的单色平行光垂直照射该光栅，已知第一级明条纹出现在 $25^\circ 20'$ 的方向上，试求：

- (1) 此光栅每毫米内有多少条透光狭缝。

(2) 对这束单色光，最多可看到第几级光栅衍射明条纹？

18.17 一束复色平行光垂直入射到每毫米内有 400 条透光缝的光栅上，测得某一波长的第 3 级明条纹恰好与红光 ($\lambda = 650\text{nm}$) 的第 2 级明条纹重合，试求：

(1) 该光的波长；

(2) 这两个明条纹重合时的衍射角。

18.18 以波长为 589.3nm 的平行光垂直入射到光栅上时测得第 2 级明条纹的衍射角为 $28^\circ 8'$ ，改用第二种光波照射时，测得其第 1 级明条纹的衍射角为 $13^\circ 30'$ 。试求：

(1) 求第二种光波波长；

(2) 在屏幕上最多能看到的第二种光的谱线级数是多少？

18.19 波长 $\lambda = 600\text{nm}$ 的单色光垂直入射到一块透射光栅上，测得第二级主极大的衍射角为 30° ，且第三级是缺级。试求：

(1) 此光栅每 mm 内有多少条透光狭缝？

(2) 每个透光缝可能的最小宽度 a 等于多少？

(3) 在上述条件下，求出在衍射角： $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ 范围内可能观察到的全部光栅衍射明纹的级次。

18.20 一双缝的间距 $d = 0.10\text{mm}$ ，每个透光缝的宽度 $a = 2.0 \times 10^{-2}\text{mm}$ ，透镜焦距 $f = 50\text{cm}$ ，现用 $\lambda = 480\text{nm}$ 的单色平行光垂直照射双缝。试求：

(1) 观察屏上干涉条纹的间距；

(2) 单缝衍射的中央明条纹的宽度；

(3) 在单缝衍射的中央包线内有多少条双缝干涉的明条纹？

18.21 在杨氏双缝干涉装置中，观察屏到双缝的距离为 2.0m ，入射光的波长为 600nm ，现测得屏上中央明纹两侧两个第二级暗纹中心之间的距离是 15mm 。试求：

(1) 双缝中心之间的距离。

(2) 由于缝有一定的宽度，所以实际的双缝干涉应为双缝衍射。假设透光缝的宽度为 $60\mu\text{m}$ ，则在上述条件下，在单缝衍射中央明纹的包络线内将有几条双缝干涉的明条纹？

18.22 现有 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ 和 $\lambda_2 = 760\text{nm}$ 的两种单色平行光，透镜的焦距 $f = 50\text{cm}$ ，当它们垂直入射到 $a = 0.10\text{mm}$ 的单缝上，试求：

- (1) 求这两种光第一级明条纹之间的距离；
- (2) 若用 $d = 5.0 \times 10^{-3}\text{mm}$ 的光栅代替单缝，这两种光第一级明条纹之间的距离又是多少？

18.23 一束波长范围为 $400\text{nm} \sim 700\text{nm}$ 的平行光垂直入射在每毫米有 500 条缝的光栅上，要想在屏幕上得到的第一级光谱的宽度为 50mm ，问透镜的焦距应为多少？

18.24 一束平行白光垂直入射在 200线/mm 的光栅上，试求：

- (1) 第 1 级白光光谱的角宽度；
- (2) 第 1 级光谱的末端和第 2 级光谱的始端之间的角距离。

18.25 以波长为 0.11nm 的 X 射线照射岩盐晶体，实验测得 X 射线与晶面的夹角为 11.5° 时获得第 1 级衍射极大。试求：(1) 岩盐晶体的晶面间距 d ；(2) 如果以另一束待测 X 射线照射，测得 X 射线与晶面夹角为 17.5° 时获得第 1 级衍射极大，求该 X 射线的波长。

第 19 章 光的偏振

课件下载：
第 19 章 光的偏振

光的干涉和衍射现象揭示了光具有波动性，但还不能确定光是横波还是纵波。光的偏振现象证实了光是横波，这与麦克斯韦电磁场理论的预言完全一致。光的偏振现象在现代人的日常生活、娱乐活动和科学研究中都具有重要应用。

本章将介绍自然光与偏振光的概念、基本规律、获得偏振光的常用方法，光在各向同性的介质表面反射和折射时的偏振规律，还要讨论光在各向异性的晶体中传播时产生双折射现象及其应用。

§ 19.1 光的偏振状态

19.1.1 自然光与完全偏振光

偏振是一切横波的共同特性。这里，我们引用机械波通过狭缝的例子来解释横波的偏振现象。将一根橡皮绳穿过一个狭缝，绳的一端固定在墙上，手持绳的另一端上下抖动，则在绳上形成机械横波沿绳传播。当绳子的抖动方向与狭缝平行时，横波可以通过狭缝继续向前传播，如图 19.1 (a) 所示。

而当绳的抖动方向与狭缝垂直时，横波将不能通过狭缝，如图 19.1 (b) 所示。而对于纵波（比如声波）无论狭缝的取向如何，都能通过狭缝，甚至是一个小孔，纵波也能顺利通过。所以，偏振是横波区别于纵波的一个最明显的标志。

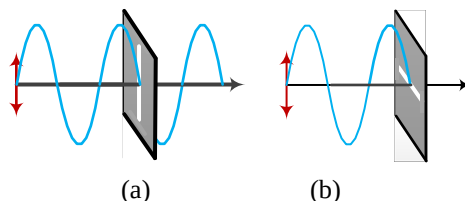


图 19.1 机械横波的偏振

根据麦克斯韦的电磁场理论，光是一种电磁波。电磁波是横波，电磁波在传播过程中电场强度 $\mathbf{E}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 的振动方向都与波的传播方向互相垂直。然而，就光波而言，能引起人们视觉反应的是电磁波中的电场强度 $\mathbf{E}$ 的振动。因此，人们通常将光波中电场强度的振动称为光振动，将 $\mathbf{E}$ 矢量称为光矢量，将 $\mathbf{E}$ 的振幅称为光振幅。既然光是电磁波，所以光应该具有偏振特性。

然而，普通光源发出的光波没有确定的偏振方向。原因是：普通光源发出光波是由

大量分子或原子在同一时刻发出的独立的光波列所组成的，各个波列的振动方向、振动频率和振动初相位都是随机的、各不相同。虽说各个独立的波列具有确定的偏振方向，但是由于各原子发光的随机性，导致了在与传播方向垂直的平面内光振动在各个方向上出现的概率均等、强度相同，且没有固定的相位差。我们将具有这种性质的光称为自然光。普通光源发出的光都是自然光。

如果将自然光的光振动分别沿两个互相垂直的方向作正交分解，显然在这两方向上光振动的振幅相等，光振动能量各占自然光总能量的一半。为此我们可以用图 19.2 (c) 来表示自然光，图中小短线表示竖直方向的光振动，小圆点表示水平方向的光振动，短线和圆点的数量相等表示两个方向的光振动强度相同。

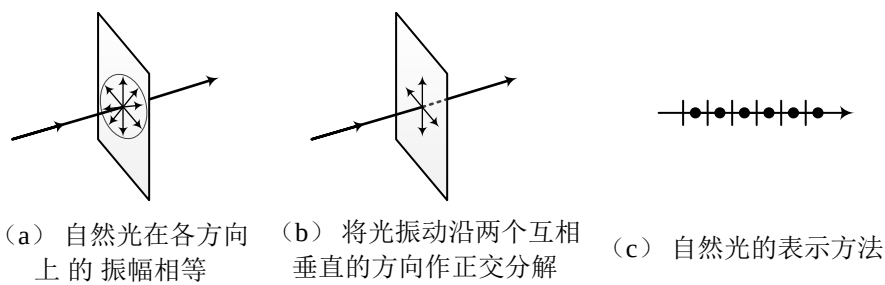


图 19.2 自然光及其表示法

自然光经过折射、反射或吸收后，可能只保留某一方向上的光振动。如果光矢量始终在某一方向上振动，这样的光就称为**完全偏振光** (complete polarized light)，或称为**线偏振光** (linearly polarized light)。我们把光矢量的振动方向和光的传播方向组成的平面称为**偏振面** (plane of polarization)，由于线偏振光的光矢量始终在该平面内，所以线偏振光又称为**平面偏振光** (plane polarized light)。线偏振光的图示如图 19.3 (a)、(b) 所示。

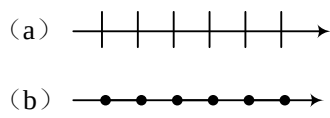


图 19.3 线偏振的图示

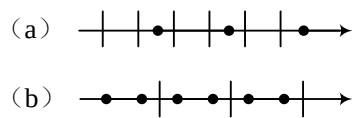


图 19.4 部分偏振光的图示

19.1.2 部分偏振光 偏振度

如果在与光的传播方向垂直的振动平面内，各个方向的光振动都有，但振幅不同，

在某个方向上光振动最强，在与之垂直的方向上光振动最弱，且各个方向的光振动之间没有固定的相位关系，这种光称为**部分偏振光**（partial polarized light），如图 19.4（a）、（b）所示。部分偏振光可以由自然光和线偏振光混合而成。

在一束部分偏振光中，若光振动沿某个方向上具有最大光强 $I_{\max}$ ，在与此垂直的方向上具有最小光强 $I_{\min}$ ，通常用

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (19.1)$$

来衡量部分偏振光的偏振程度，称 P 为**偏振度**。不难看出，对于线偏振光，因 $I_{\min} = 0$ ， $P=1$ ；对于自然光，因 $I_{\min} = I_{\max}$ ， $P=0$ ；而部分偏振光的偏振度介于 0 和 1 之间。

19.1.3 圆偏振光 椭圆偏振光

如果光在传播时，光矢量的振动方向以光线为轴线在不断地旋转，并且在与传播方向垂直的平面内，光矢量的端点所画出的轨迹是一个圆，这样的光称为**圆偏振光**（circularly polarized light）；如果光矢量的端点画出的轨迹是一个椭圆，这样的光称为**椭圆偏振光**（elliptic polarized light），如图 19.5 所示。

由振动叠加原理可知，当一个质点同时参与两个振动方向互相垂直、频率相同的两个简谐振动时，该质点合运动的轨迹就是一个椭圆，椭圆的离心率 e 取决于两振动振幅的比值和相位差。所以椭圆偏振光可以看成是由两个频率相同、传播方向相同、振动方向互相垂直、且具有恒定相位差的两束线偏振光的叠加而成的，而线偏振光和圆偏振光可以看成是椭圆偏振光在一定条件下的特例。

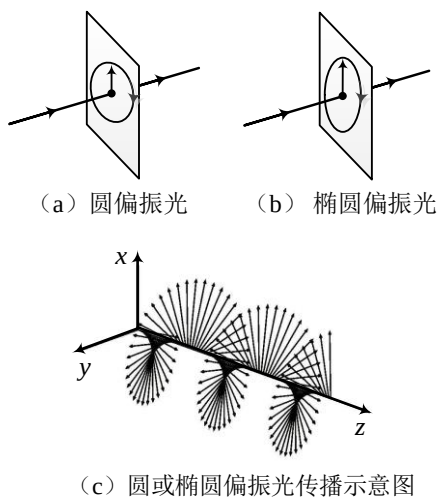


图 19.5 圆偏振光和椭圆偏振光

§ 19.2 起偏与检偏 马吕斯定律

19.2.1 偏振片 起偏与检偏

某些天然或人造材料（如电气石晶体、镀在聚氯乙烯薄膜上的硫酸碘奎宁等）内部存在着一个特定的方向，当光振动方向与之垂直时，光振动的能量会被强烈吸收而无法通过；当光振动方向与之平行时，则因吸收很小得以通过。这种对光振动方向具有选择性吸收的性质称为介质的二向色性。当自然光入射到由这种材料制作的光学元件上时，由于某个方向上的光振动被完全吸收而消失，只剩下与吸收方向垂直的光振动，于是从该元件透射出来的光就是线偏振光，这样的光学元件称为**偏振片**（polaroid）。偏振片中允许光振动透过的方向叫做偏振片的**偏振化方向**或**透振方向**，并用符号“ $\uparrow$ ”表示。理想的偏振片对于与偏振化方向平行的光振动全部透射，而对于与偏振化方向垂直的光振动则全部吸收。

我们把从自然光获得偏振光的过程称为**起偏**，相应的光学元件称为**起偏器**（polarizer），如图 19.6 中的偏振片 P1。遗憾的是，人类的眼睛只能鉴别光的颜色和强度，对偏振光无法识别。因此要鉴别一束光是否是偏振光仍然要用偏振片，如图 19.6 中的

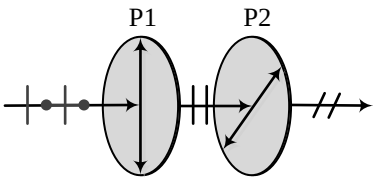


图 19.6 起偏与检偏

偏振片 P2。先使偏振片 P1 和 P2 前后平行放置。自然光通过 P1 后就成了完全偏振光，再射到 P2 上。若以光线为轴，转动 P2，则会发现透射光强度在零和最大值之间变化。当 P1、P2 的偏振化方向平行时，透射光强度最大，当 P1、P2 的偏振化方向互相垂直时，透射光强为零，即出现所谓的**消光现象**。

如果以光线为轴，转动 P2 时，会交替出现透射光强由最大到零（消光现象），再由零到最大的周期性变化过程，则入射到 P2 上的光一定是线偏振光，否则就不是线偏振光。检验光波是不是线偏振光的过程称为**检偏**，所用的偏振片 P2 称为**检偏器**。

19.2.2 马吕斯定律

1808 年，法国物理学家马吕斯在研究光的偏振现象时发现：在不考虑吸收和反射的条件下，一束强度为 I_0 的线偏振光垂直入射到偏振片上时，从偏振片透射出来的光强 I 与 I_0 的关系满足

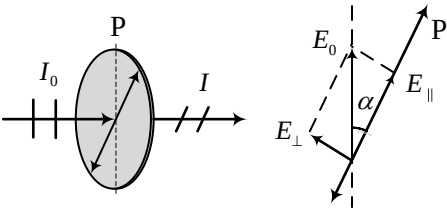


图 19.7 马吕斯定律

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (19.2)$$

式中 α 是入射线偏振光的光振动方向与检偏器的偏振化方向之间的夹角。这个规律称为马吕斯定律。

利用光的电磁理论，马吕斯定律很容易被理解和证明。设入射线偏振光的强度为 I_0 ，光矢量的振幅为 E_0 ($I_0 \propto E_0^2$)，光振动方向与偏振片 P 的偏振化方向的夹角为 α 。我们可将光矢量的振幅 E_0 分解为平行和垂直于偏振化方向的两个分量 $E_{\parallel}$ 和 $E_{\perp}$ ，如图 19.7 所示，其中只有平行分量 $E_{\parallel}$ 能够通过偏振片，又光强与光振幅的平方成正比，所以从偏振片 P 透射出的光振幅和光强分别为

$$E = E_{\parallel} = E_0 \cos \alpha$$

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

例 19.1 一束部分偏振光由自然光和线偏振光混合而成，其中自然光与线偏振光的强度之比为： $I_s/I_0 = 2/1$ 。现让这束光垂直入射到偏振片 P 上。以光线为轴转动偏振片，试求：

- (1) 由偏振片射出的最大光强与最小光强之比；
- (2) 入射光的偏振度。

解：(1) 设偏振片的偏振化方向与入射线偏振光的光振动方向之间的夹角为 α ，则由马吕斯定律可知，透射光强为

$$I = I_s/2 + I_0 \cos^2 \alpha = I_0 (1 + \cos^2 \alpha)$$

由此得：当 $\alpha = 0$ 或 $\pm\pi$ 时，透射光强最大；当 $\alpha = \pm\pi/2$ 或 $\pm3\pi/2$ 时，透射光强最小，且

$$I_{\max} = I_s/2 + I_0 = 2I_0$$

$$I_{\min} = I_s/2 + 0 = I_0$$

所以最大与最小透射光强之比为

$$I_{\max}/I_{\min} = 2$$

(2) 由偏振度的定义可知，入射光的偏振度为

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2I_0 - I_0}{2I_0 + I_0} = \frac{1}{3}$$

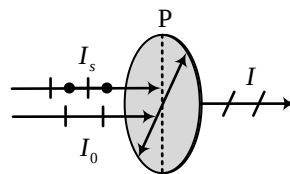


图 19.8 例 19.1 图

例 19.2 一束强度为 I_s 的自然光垂直入射到 3 块相互平行的偏振片上, 如图 19.9 所示。其中 P1 与 P3 的偏振化方向互相垂直, P2 的 P1 的偏振化方向之间的夹角为 α 。试求由 P3 透射出的光强 I_3 与 α 的函数关系, 并分析透射光强最大及最小时 α 的可能取值。

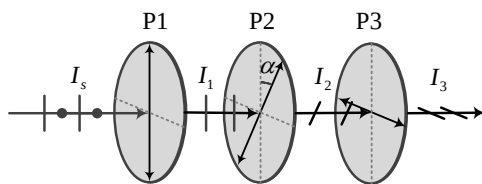


图 19.9 例 19.2 图

解: 由题意可知

$$I_1 = I_s/2, \quad I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

又 P2 与 P3 的偏振化方向之间的夹角为 $90^\circ - \alpha$, 所以

$$I_3 = I_2 \cos^2 (90^\circ - \alpha) = I_2 \sin^2 \alpha$$

由此可得

$$I_3 = \frac{1}{2} I_s \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{8} I_s \sin^2 (2\alpha)$$

分析可知: 当 $\alpha = \pm\pi/4$ 或 $\pm 3\pi/4$ 时, 透射光最大, $I_3 = I_{3\max} = I_s/8$;

当 $\alpha = \pm\pi/2$ 或 $\pm 3\pi/2$ 时, 透射光最小, $I_3 = I_{3\min} = 0$ 。

例 19.3 自然光连续通过两个偏振化方向夹角为 60° 的偏振片时, 透射光的强度为 I_1 。在这两个偏振片之间再插入第三个偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角。试求透射光的强度。

解: 设通过第一个偏振片后的光强为 I_0 , 则由马吕斯定律, 有

$$I_1 = I_0 \cos^2 60^\circ = I_0/4$$

同理可知, 插入第三个偏振片后, 最后透射出的光强为

$$I_2 = (I_0 \cos^2 30^\circ) \cos^2 30^\circ = 9I_0/16$$

即

$$I_2 = 9I_1/4 = 2.25I_1$$

§ 19.3 反射光与折射光的偏振 布儒斯特定律

19.3.1 反射光的偏振性 布儒斯特定律

1812 年苏格兰物理学家布儒斯特在研究的光的偏振现象时发现：当一束自然光投射于两种介质（如空气和玻璃）的分界面时，一般情况下反射光和折射光都是部分偏振光，反射光中垂直于反射面的光振动成份较大，而且光的偏振度随入射角而变。当光的入射角 i 满足

$$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1} \quad (19.3)$$

时，反射光成为完全偏振光，其光振动方向垂直于反射面，而折射光仍然是部分偏振光。这个规律称为**布儒斯特定律**，对应的入射角 i_b 称为**起偏振角**（polarizing angle），又称为**布儒斯特角**。

当光从空气射向玻璃时，由式（19.3）算得 $i_b \approx 56^\circ$ ；当光从空气射向水面时， $i_b \approx 37^\circ$ 。

实验还发现，当反射光成为完全偏振光时，反射线与折射线一定互相垂直，如图 19.10（b）所示。这是因为，根据折射定律：

$$n_1 \sin i_b = n_2 \sin \gamma$$

又 $\tan i_b = \frac{\sin i_b}{\cos i_b} = \frac{n_2}{n_1}$ ，所以： $\cos i_b = \sin \gamma$ ，由此得： $i_b + \gamma = 90^\circ$ ，即反射线与入射线互相垂直。

布儒斯特定律可以由麦克斯韦的电磁场理论给予严格证明。

例 19.4 如图 19.11 所示，一束自然光入射到水面上，其折射光又射入到置于水中的平板玻璃上。已知：水的折射率 $n_2 = 1.33$ ，玻璃的折射率 $n_3 = 1.52$ 。要使从水面和玻璃表面的反射光同时成为线偏振光，试求：玻璃面与水面之间的夹角 α 。

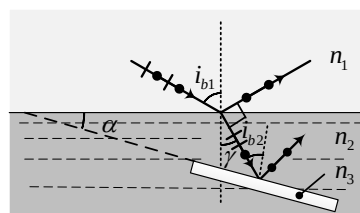


图 19.11 例 19.4 图

解： 设自然光在水面上的入射角为 i_{b1} ，其折射角为 γ ，折射光对玻璃的入射角为 i_{b2} 。当两次反射光均为完全偏振光时，由布儒斯特定律，可知

$$i_{b1} = \arctan(n_2/n_1) = \arctan 1.33 = 53.1^\circ$$

$$i_{b2} = \arctan(n_3/n_2) = \arctan(1.52/1.33) = 48.8^\circ$$

且

$$\gamma = 90^\circ - i_{b1} = 36.9^\circ$$

又由图可知

$$\alpha + (90^\circ + \gamma) + (90^\circ - i_{b2}) = 180^\circ$$

所以玻璃面与水面之间的夹角为

$$\alpha = i_{b2} - \gamma = 11.9^\circ = 11^\circ 54'$$

19.3.2 折射光的偏振性

虽然自然光以布儒斯特角入射时反射光是线偏振光，但强度非常小，仅占入射光总能量的 7% 左右，绝大部分的光能量为折射光所拥有，所以折射光的强度很大，但却是偏振度很低的部分偏振光。为了提高折射光的偏振度，可以使自然光以布儒斯特角入射在由多块平面玻璃叠放在一起组成的器件上，如图 19.12 所示，这样的器件称之为“**玻璃片堆**”。可以证明：当自然光以布儒斯特角入射到第一片玻璃的上表面时，其折射光将同样以布儒斯特角入射在该玻璃片的下表面上，然后又以布儒斯特角入射到第二片玻璃表面上，……，依次类推。于是在玻璃与空气的每个分界面上，光线都能以布儒斯特角入射，每反射一次，入射光中垂直于反射面的光振动能量就反射掉一些。这样，经过多次反射后，最后通过玻璃片堆的折射光就可近似地看作是完全偏振光。

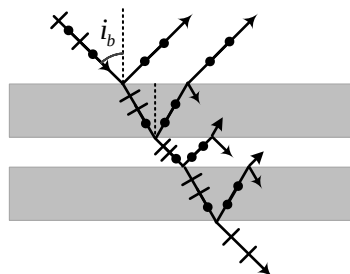


图 19.12 玻璃片堆

反射光和折射光的偏振现象在日常生活中随处可见，在科学实验中也有重要应用。当我们驾车在柏油路面上迎着太阳行驶时，路面上强烈的太阳反射光会使司机眩目。为了安全驾驶，司机可佩戴偏振太阳镜。由于地面反射光中主要的光振动方向沿水平方向，所以只要偏振太阳镜的偏振化方向沿竖直方向，就可以防止柏油路面上反射眩光的耀眼。在博物馆、展览馆等地方对馆中藏品进行拍照时，照片往往会受到馆内光源的光污染，通过在镜头前加一个偏振片，可以有效的消除照片上光源的光污染。

在有些激光器内部，有一对沿一定角度放置的玻璃片，如图 19.13 所示。沿轴线传播的光线以布儒斯特角入射到这一对玻璃片上时，在玻璃表面的每次反射都将垂直于反射

面的光能量反射掉一部分，所以最终从输出端射出的激光就是完全偏振光，这样的一对玻璃片称为布儒斯特窗。

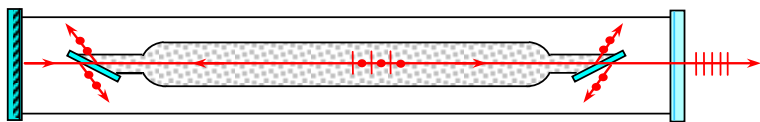


图 19.13 激光器中的布儒斯特窗

§ 19.4 双折射

19.4.1 双折射现象

我们知道，一束光射到两种各向同性的透明介质的分界面上发生折射时，折射光线只有一条，且满足折射定律。但是，当光射到各向异性的透明晶体上时，一束入射光会有两束折射光，这称为**双折射现象**（birefringence phenomenon）。图 19.14 所示是将一块方解石晶体压在一张纸上，透过方解石晶体，我们看到晶体下面的一个字都变成了两个字。

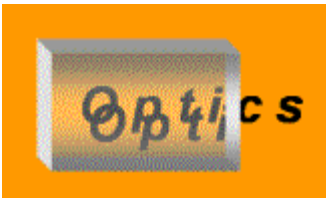


图 19.14 双折射现象

在双折射现象中，其中一条折射光遵守折射定律，这条光线称为**寻常光**（ordinary ray），又称为 **o 光**；另一条折射光线不遵守折射定律，这条光线称为**非常光**（extraordinary ray），又称为 **e 光**。如果我们将一束光垂直射入方解石晶体内，如图 19.15 所示，会看到有两束折射光；若以光线为轴线，转动方解石晶体，会发现 o 光不动，而 e 光绕着 o 光转动。

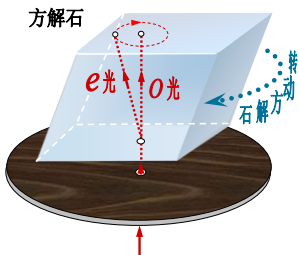


图 19.15 光线通过方解石晶体时的双折射现象。转动方解石，e 光绕 o 光旋转

如果用检偏器对两束折射光进行检验，发现 o 光和 e 光都是线偏振光，且光振动方向近乎垂直。

19.4.2 晶体的光轴 主截面与主平面

实验表明，晶体内有一个特定的方向，当光沿着该特定的方向传播时，不产生双折射现象。这个特定的方向叫做晶体的**光轴**。有些晶体（如方解石、石英、红宝石等）只有一个光轴方向，称为**单轴晶体**；有些晶体（如云母、硫磺、蓝宝石等）有两个光轴方向，称为**双轴晶体**。下面我们仅以单轴晶体为例进行讨论。

具有代表性的单轴晶体有方解石和石英两种，下面以方解石为例说明其结构。

方解石是碳酸钙（ CaCO_3 ）的六角系晶体，具有光滑表面的天然方解石晶体的外形为斜六面体，每个面都是平行四边形，每个表面的锐角都是 $78^\circ 8'$ （近似为 78° ），钝角都是 $101^\circ 52'$ （近似为 102° ），如图 19.16 所示。三个平面的钝角相交在一起，构成钝顶角，如图 19.16 中的 A 角或 B 角。

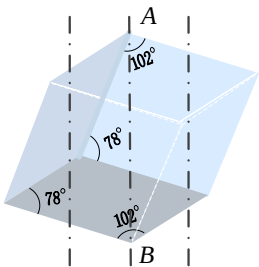


图 19.16 方解石晶体及其光轴

天然方解石晶体有两个钝顶角，通过任一钝顶角的顶点作一条直线，使它和通过该钝顶角的每条棱边的夹角都相等，则这条直线所表示的方向就是方解石晶体的光轴。若将方解石晶体的棱边都切成等长，则光轴方向正是两个钝顶角 A 、 B 的连线方向。

应该明确的是，晶体的光轴并不是晶体内某一条特定的轴线，而是指一个特殊的方向。在图 19.16 中，凡是平行于两钝顶角连线的直线，都是该晶体的光轴，如图中所有互相平行的点划线都是光轴。如果把方解石的两个钝顶角 A 和 B 沿垂直于光轴方向磨平，然后用一束光垂直入射，使光线沿着光轴方向射入晶体内部，就可看到只有一束光射出，不产生双折射现象。

为了便于讨论 o 光和 e 光的光振动方向，我们首先引入主截面和主平面的概念。当光线沿晶体的某个表面入射时，此表面的法线和光轴所构成的平面叫做**晶体的主截面**（principal Section of Crystal）。在晶体内部，由光轴和折射光线组成的平面称为该光线的主平面（principal plane）。一般情况下，同一束入射光线所对应的 o 光的主平面与 e 光的主平面两者不共面。只有当光线在晶体的主截面内入射时， o 光、 e 光的主平面才会共面。实验表明， o 光的光振动方向垂直于 o 光的主平面（当

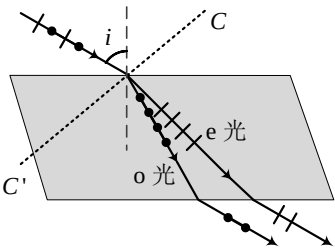


图 19.17 光线在主截面内入射时 o 光、 e 光的偏振状态

时， o 光、 e 光的主平面才会共面。实验表明， o 光的光振动方向垂直于 o 光的主平面（当

然也垂直于光轴), e 光的光振动方向平行于 e 光主平面内。因此当光线在晶体的主截面内入射时, o 光和 e 光的光振动方向互相垂直, 如图 19.17 所示, 图中 CC' 为晶体的光轴。

19.4.3 光在单轴晶体中的传播

1. 单轴晶体中光波的波阵面

我们知道, 光在各向同性的均匀介质 (例如空气、水或玻璃) 中传播时, 无论光的偏振状态如何, 光的传播速度 u 是一个定值, 与传播方向无关, 所以介质中任意一个点光源或子波源发出的光波的波阵面一定是一个球面。此外根据折射率的定义 $n = c/u$ 可知, 介质的折射率 n 也是一个定值, 与光的传播方向无关。

当光在各向异性的晶体中传播时, 由于 o 光的传播速度 u_o 与方向无关, 所以 o 光的波阵面仍然是一个球面, 但是 e 光的传播速度与传播方向有关。沿光轴方向, o 光、e 光的速度相等; 在垂直于光轴方向上, 两者相差最大。所以 e 光的波阵面是一个旋转椭球面, 而且在同一时刻, e 光的旋转椭球面与 o 光的球面在光轴方向相切。如图 19.18 所示。

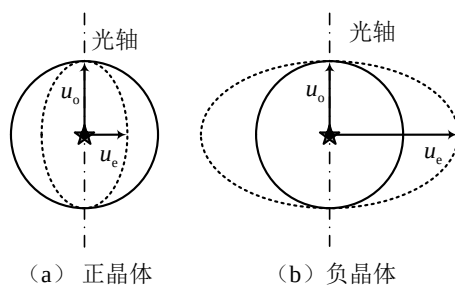


图 19.18 o 光、e 光的波阵面

2. 单轴晶体中的主折射率

由于 e 光的速度与传播方向有关, 所以晶体对 e 光的折射率不是常数, 而晶体对 o 光的折射率 $n_o = c/u_o$, 仍然是常数。由于在垂直于光轴方向上, o 光与 e 光的速度相差最大, 所以晶体对 o 光和 e 光的折射率也相差最大。若用 u_e 和 n_e 分别表示垂直于光轴方向上 e 光的传播速度和折射率, 则: $n_e = c/u_e$ 称为晶体对 e 光的**主折射率**。在光轴方向上, 晶体对 o 光 e 光的折射率相同; 在其它方向上, 晶体对 e 光的折射率介于 n_e 与 n_o 之间。

如果, $u_o > u_e$, 即 $n_o < n_e$, 这类晶体称为正晶体, 如石英、冰等, 如图 19.18 (a) 所示; 反之, 如果, $u_o < u_e$, 即 $n_o > n_e$, 这类晶体称为负晶体, 如方解石、电气石等,

如图 19.18 (b) 所示。表 19.1 给出了几种常见晶体的主折射率。

表 19.1 几种双折射晶体的主折射率(入射光波长为 589.3nm)

晶 体	n_o	n_e	$n_e - n_o$	晶体光性
方解石	1.6584	1.4864	- 0.1720	负
石英(水晶)	1.5443	1.5534	+ 0.0089	正
电气石	1.669	1.638	- 0.031	负
白云石	1.6811	1.500	- 0.181	负
冰	1.309	1.313	+ 0.004	正
硝酸钠	1.5854	1.3369	- 0.1458	负

3. 惠更斯原理在双折射现象中的应用

早在 1690 年, 惠更斯就已经用子波概念对双折射现象作出了初步解释。下面, 我们利用上述球面波和旋转椭球面波的概念以及惠更斯作图法, 简单而直观地确定晶体中 o 光和 e 光传播方向, 从而加深对双折射现象的理解。

(1) 平行光斜入射, 光轴与晶体表面成某一角度, 同时假设自然光在晶体的主截面内斜入射, 如图 19.19 (a) 所示。在 t 时刻, 入射平行光的波面为 AB, 在 $t + \Delta t$ 时刻, 光线 2 从 B 射到 C 点时, 光线 1 则从 A 点进入晶体内部, 其中 o 光的波阵面为半径为 $u_o \Delta t$ 的半球面 (即为图中的半圆), e 光的波阵面是一个旋转椭球面 (图中为半个椭圆), 两者在光轴方向上相切。过 C 点分别作半圆和半个椭圆的切线 CD 和 CE, 则 CD 就是 o 光在晶体内的波阵面, CE 是 e 光在晶体内的波阵面, 连线 AD 就是 o 光的传播方向, AE 就是 e 光的传播方向。

(2) 平行光垂直入射, 光轴与晶体表面成某一角度, 如图 19.19 (b) 所示。假设在 t 时刻, 两条平行的光线同时射入到晶体表面。则射入点 A、B 处的两个子波源发出 o 光和 e 光, 在 $t + \Delta t$ 时刻的波阵面分别是半径为 $u_o \Delta t$ 的半球面和旋转椭球面, 两者在光轴方向上相切。分别作半圆和半椭圆的公切线 CD 和 EF, 则 CD 就是 o 光在晶体内的波阵面, EF 是 e 光在晶体内的波阵面, 连线 AC 就是 o 光的传播方向, AE 就是 e 光的传播方向。

(3) 平行光垂直入射, 且光轴平行于晶体表面, 如图 19.19 (c) 所示。通过惠更斯

作图法不难看出，平行光进入晶体后，o 光、e 光均沿原方向传播，但传播速度不同（折射率不同）。因此传播一定距离后，o 光和 e 光的光程不同。

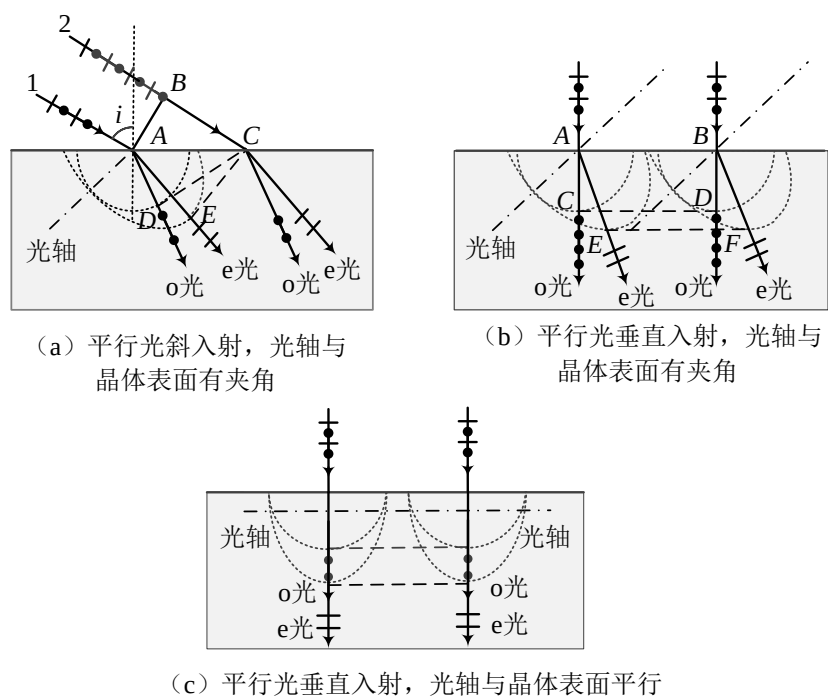


图 19.19 惠更斯作图法确定 o 光、e 光的传播方向

19.4.4 偏振棱镜

利用晶体的双折射现象，可以制成适合各种用途的偏振棱镜，其优点是透明度高，偏振度高，使用方便。光学实验中常见的偏振棱镜有尼科耳棱镜、沃拉斯顿棱镜等，下面对这两种棱镜作简单介绍。

1. 沃拉斯顿棱镜

渥拉斯顿棱镜由两块光轴相互垂直的直角方解石三棱镜胶合而成，如图 19.20 所示。自然光垂直于 AB 面入射时，参考图 19.19 (c) 可知，在第一块棱镜内，o 光和 e 光在同一直线上沿原方向传播，不会分开，但 o 光、e 光的传播速度不同，折射率

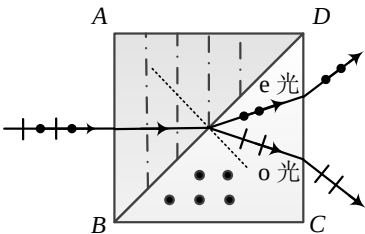


图 19.20 沃拉斯顿棱镜

不同。由于第二块棱镜的光轴与第一块棱镜的光轴垂直，所以在第一块棱镜中的 o 光（其光矢量的振动方向垂直于纸面），进入到第二块棱镜后变成了 e 光，其折射率也由 n_o 变为 n_e ，由于方解石的 $n_e < n_o$ ，相当于这部分光在界面处是由光密介质斜入射到光疏介质，因而光线远离法线向上偏折。同理，在第一块棱镜中的 e 光，进入到第二块棱镜中就成为 o 光，折射率由 n_e 变为 n_o ，相当于从光疏介质斜入射到光密介质，因而靠近界面法线向下偏折。于是在第二块棱镜中，两束线偏振光被分开。这两束已分开了的线偏振光，最后从 CD 面射出时，都是从光密介质斜入射到光疏介质（空气），故又一次远离法线，分别向上和向下偏折，成为两束分得较开、振动方向相互垂直的线偏振光。

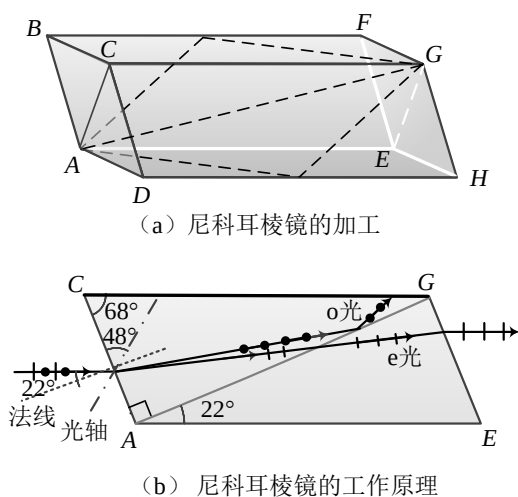


图 19.21 尼科耳棱镜

2. 尼科尔棱镜

尼科尔棱镜是用方解石加工制成的另一类偏振棱镜，如图 19.21 (a) 所示。首先取一块长宽比约为 3:1 的方解石晶体，并将两个端面琢磨使 $\angle ACG$ 和 $\angle GEA$ 均由 71° 变为 68° ，然后沿图中虚线所示将方解石晶体切开，最后用加拿大树胶粘合就成了尼科尔棱镜。

尼科尔棱镜的工作原理如图 19.21 (b) 所示。ACGE 是尼科尔棱镜的主截面，上下两块用加拿大树胶粘合起来。加拿大树胶是一种透明的介质，它的折射率比方解石中 o 光的折射率小，但比 e 光的折射率大。对于钠黄光，方解石的折射率 $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ ，加拿大树胶的折射率 $n = 1.55$ ，正好介于 n_e 和 n_o 之间。自然光从 AC 面射入后分成 o 光和

e 光，这两束光到达 AG 界面时，e 光的入射角小于 o 光的入射角。在 AG 界面上，对 e 光来说是由光疏介质斜入射到光密介质，故 e 光可以透过树胶层，再由棱镜的 GE 面射出；但对于 o 光，则是由光密介质斜入射到光疏介质，且此时的入射角已经大于临界角（ $69^{\circ}12'$ ），所以 o 光将在 AG 界面上发生全反射，然后射到涂黑的 CG 面被吸收。因此，自然光经尼科耳棱镜后，透射出的是一束振动面在主截面内的线偏振光。

* § 19.5 波片 圆偏振光与椭圆偏振光

19.5.1 波片

所谓波片，就是光轴与晶体表面平行的晶体薄片，如图 19.22 所示。由图 19.19 (c) 可知，当光轴与晶体表面平行时，如果光线垂直入射，则晶体内的 o 光和 e 光仍然沿原方向传播，两者不分开，但由于 o 光、e 光的传播速度不同、折射率不同，所以经过一段距离后，两者会产生一定的光程差。

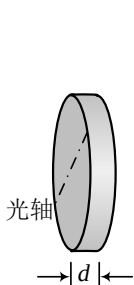


图 19.22 波片

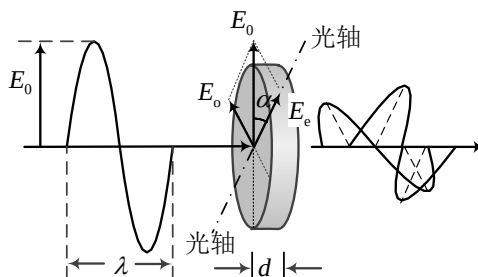


图 19.23 线偏振光在波片内的正交分解

现假设用一束振幅为 E_0 、强度为 I_0 （ $I_0 \propto E_0^2$ ）的线偏振光垂直射到厚度为 d 的波片上，光振动方向与波片中光轴的夹角为 α ，如图 19.23 所示。则该线偏振光在进入晶体的那一刻，将自动沿光轴方向和垂直于光轴方向，分解为 e 光和 o 光两个同相位的线偏振光，其振幅分别为

$$E_o = E_0 \sin \alpha \quad E_e = E_0 \cos \alpha \quad (19.4)$$

经过距离 d 之后，两束光从波片中射出时产生的光程差为

$$\delta_0 = (n_o - n_e)d \quad (19.5)$$

对应的相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad (19.6)$$

若 $\delta_0 = (n_o - n_e)d = \pm\lambda/4$ ，即 $\Delta\varphi_0 = \pm\pi/2$ ，对应的波片称为“**1/4 波片**”；

若 $\delta_0 = (n_o - n_e)d = \pm\lambda/2$ ，即 $\Delta\varphi_0 = \pm\pi$ ，则称为“**1/2 波片**”或“**半波片**”；

若 $\delta_0 = (n_o - n_e)d = \pm\lambda$ ，即 $\Delta\varphi_0 = \pm2\pi$ ，则称为“**全波片**”。

19.5.2 圆偏振光与椭圆偏振光的获得

在第六章中讨论振动的合成问题时，我们已经知道：如果一个质点同时参与两个频率相同、振动方向互相垂直的两个简谐振动

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则该质点合运动的轨迹是一个椭圆，其轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

不难看出，当两振动的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 或 $\pm 2k\pi$ 时，合振动的轨迹是一、三象限中的直线；当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ 时，轨迹是二、四象限中的直线；当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi/2$ 时，轨迹是以 xy 轴为长短轴的正椭圆，若此时还有 $A_1 = A_2$ ，则轨迹由正椭圆变成圆。

基于上述原理，我们知道：只要将一束线偏振光垂直射到波片上，并使光振动方向与波片内的光轴有一个夹角 α ，则从波片中射出的两个振动方向互相垂直的线偏振光之间，有一个由式 (19.6) 决定的相位差 $\Delta\varphi$ ，它们的振幅由式 (19.4) 决定。**这两个沿同一方向传播、振动方向互相垂直、具有固定相位差的线偏振光，一般情况下合成后成为一个椭圆偏振光。**若使用的波片是全波片，则 $\Delta\varphi = \pm 2\pi$ ，合成后仍然是线偏振光，且光振动方向不变；若为半波片，则 $\Delta\varphi = \pm\pi$ ，合成后也是线偏振光，但光振动方向将绕光轴转过 2α 角度；若为 1/4 波片，则 $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ 合成后是一个以光轴方向为长轴（或短轴）的正椭圆偏振光，若此时同时满足 $\alpha = 45^\circ$ ，可获得圆偏振光。

19.5.3 圆偏振光与椭圆偏振光的检验

在日常生活及科学实验中，要区分一束光是不是线偏振的，非常容易，仅用一块偏

振片（检偏器）就够了。方法是：让光线垂直射到偏振片上，并以光线为轴线，转动偏振片，观察透射光是否能出现消光现象。若有，入射光就是线偏振光，否则就不是。但是要区分自然光还是圆偏振光、部分偏振光还是椭圆偏振光，仅有检偏器是不够的，还需要有 $1/4$ 波片。

1. 自然光与圆偏振光的鉴别

让自然光或圆偏振光先垂直入射到 $1/4$ 波片上，再让透射光射到偏振片上，并以光线为轴旋转偏振片。若旋转偏振片时出现消光现象，则入射光是圆偏振光；若旋转时光强不变，则为自然光。这是因为圆偏振光可以看成是两个振动方向互相垂直的、具有固定相位差 $\pi/2$ 的两个线偏振光的叠加，经过 $1/2$ 波片后，这两个线偏振光的之间的相位差又增加了 $\pm\pi/2$ ，所以总相位差变为 0 或 π ，合成后成为线偏光，所以通过偏振片后有消光现象。而自然光通过 $1/4$ 波片后仍然是自然光，通过偏振片时光强不变。

2. 部分偏振光和椭圆偏振光的鉴别

首先让部分偏振光或椭圆偏振光通过偏振片，转动偏振片使透射光强最强（或最弱）；然后将 $1/4$ 波片插在偏振片的前面，并使波片的光轴方向与偏振片的偏振化方向平行；最后转动偏振片，观察光强变化情况。若出现消光现象，则原入射光为椭圆偏振光，否则为部分偏振光。这是因为椭圆偏振光可以沿椭圆的长轴和短轴方向分解为振动方向互相垂直的、相位差为 $\pi/2$ 两个线偏振光，经过 $1/4$ 波片后，这两个线偏振光的之间的相位差又增加了 $\pm\pi/2$ ，所以总相位差变为 0 或 π ，合成后成为线偏光，所以通过偏振片后有消光现象。而部分偏振光通过 $1/4$ 波片后仍然是部分偏振光，通过偏振片时不会产生消光现象。

* § 19.6 偏振光的干涉 人为双折射

19.6.1 偏振光的干涉

在光的干涉一章中，我们知道光干涉的条件是：两束光的振动频率相同、振动方向相同、振动相位差恒定不变。从上面的讨论中我们又知道：当一束单色线偏振光垂直透过

波片后，会自动分解为振动频率相同、具有恒定相位差的两个线偏振光，但由于它们的振动方向互相垂直，所以它们尽管沿同一方向传播，叠加后可以合成为椭圆偏振光，但相互之间不会干涉。那么如何才能让这两束偏振光产生干涉呢？方法就是通过偏振片把这两个光振动引到同一方向上。

图 19.24 是偏振光干涉的实验装置示意图。自然光通过偏振片 P1 后成为线偏振光，然后垂直射到波片上，通过波片后就自动分解为振动方向互相垂直的、具有恒定相位差的两个线偏振光（o 光和 e 光），通过偏振片 P2 后，就成了两束振动方向相同的线偏振光，满足相干条件。

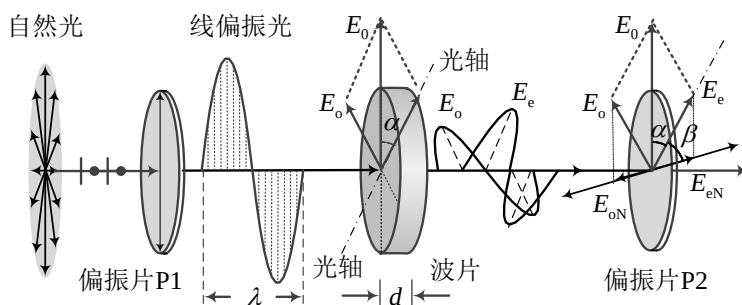


图 19.24 偏振光的干涉

假设振幅为 E_0 线偏振光垂直入射到波片上，波片的光轴与偏振片 P1 的偏振化方向的夹角为 α ，则晶体内 o 光、e 光的振幅，以及通过波片后的相位差将分别由式 (19.4) 和式 (19.6) 确定，即

$$E_o = E_0 \sin \alpha, \quad E_e = E_0 \cos \alpha, \quad \Delta \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$$

下面，我们来讨论两种特殊的偏振光干涉情况。

1. 当偏振片 P1、P2 的偏振化方向互相垂直时，即图 19.24 中 $\alpha + \beta = 90^\circ$ 时

结合图 19.24 及图 19.25 (a)，不难看出，o 光、e 光的光振幅在 P2 的偏振化方向上的投影为

$$E_{oN} = E_o \cos \alpha = E_0 \sin \alpha \cos \alpha, \quad E_{eN} = E_e \sin \alpha = E_0 \cos \alpha \sin \alpha \quad (19.7)$$

但由于 E_{oN} 和 E_{eN} 的投影方向相反，所以两者之间的总相位差为

$$\Delta\varphi_{\perp} = \Delta\varphi_0 + \pi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi \quad (19.8)$$

式中 $\Delta\varphi_0$ 就是 o 光、e 光通过波片后的相位差，由式 (19.6) 给定。根据光的干涉理论，合成后总的光振幅为

$$E_{\perp} = \sqrt{E_{oN}^2 + E_{eN}^2 + 2E_{oN}E_{eN} \cos \Delta\varphi_{\perp}} = E_o \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta\varphi_0}{2} \quad (19.9)$$

当 $\Delta\varphi_0 = \pi$ 时， $E_{\perp}$ 最大，满足相长干涉；当 $\Delta\varphi_0 = 2\pi$ 时， $E_{\perp} = 0$ 满足相消干涉。

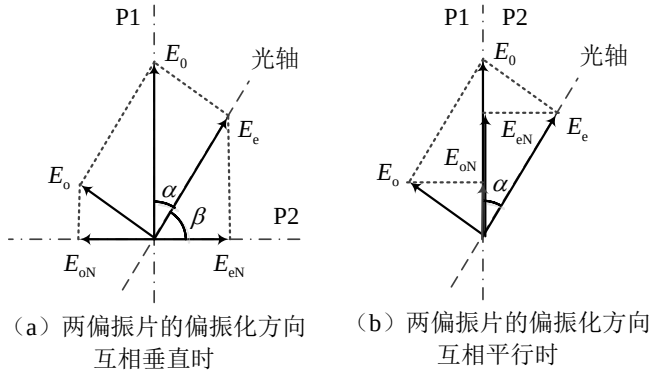


图 19.25 偏振光干涉中光振幅的正交分解

2. 当偏振片 P1、P2 的偏振化方向互相平行时

参考图 19.25 (b)，不难看出，o 光、e 光的光振幅在 P2 的偏振化方向上的投影分别为

$$E_{oN} = E_o \sin \alpha = E_o \sin^2 \alpha \quad E_{eN} = E_e \cos \alpha = E_o \cos^2 \alpha \quad (19.10)$$

但由于 E_{oN} 和 E_{eN} 的投影方向相同，没有附加相位差，以

$$\Delta\varphi_{\parallel} = \Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \quad (19.11)$$

产生干涉后，光振动的振幅为

$$E_{\parallel} = \sqrt{E_{oN}^2 + E_{eN}^2 + 2E_{oN}E_{eN} \cos \Delta\varphi_{\parallel}} = E_o \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \quad (19.12)$$

当 $\Delta\varphi_0 = 2\pi$ 时， $E_{\parallel}$ 取得最大值，满足相长干涉，透射光强最大；当 $\Delta\varphi_0 = \pi$ 时， $E_{\parallel}$ 最小，但不等于 0。

由于光强 $I = E^2$ ，所以由式 (19.9)、(19.12) 可知

$$I_{\perp} + I_{\parallel} = E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2 = E_0^2$$

这表明对于某一给定波长（颜色）的光波，若 P_1 、 P_2 垂直时干涉加强，则平行时必减弱，反之亦然。不难想象，若以光线为轴，旋转 P_2 则透射光的强度就在上述最大值和最小值之间连续变化。此外，由于相位差与晶片的波长有关，如果用白光照射，就会出现彩色干涉条纹，并且随着 P_1 、 P_2 之间夹角的变化，图案的色彩也随之改变。这种由偏振光的干涉而出现彩色干涉条纹的现象称为**色偏振**（chromatic polarization）。利用色偏振现象可以非常有效地鉴定某种透明介质、矿物材料、生物细胞等是否具有双折射现象，从而能揭示这些材料的性质、构成等。在冶金工业、地矿研究、材料科学和医学检测中广泛应用的**偏振光显微镜**（polarizing microscope）就是利用偏振光干涉原理制成的。

19.6.2 人为双折射

前面讨论的都是存在于晶体中的双折射现象。实验发现，有些非晶体在自然状态下是各向同性的，没有双折射现象，但是在受到外界机械力作用时，或受到强电场、强磁场作用时也会产生双折射现象。这种在外界条件（或人为条件）影响下产生的双折射现象称为**人为双折射**。

1. 光弹效应

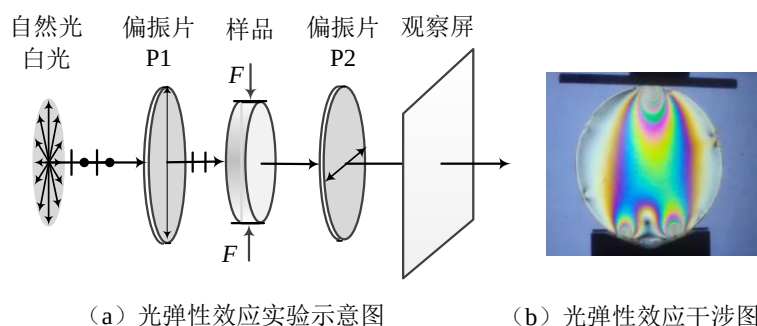


图 19.26 光弹性效应及光弹性干涉图

实验发现，有些在自然状态下各向同性的非晶体（如塑料、有机玻璃等），在受到机械压力时，可以变成各向异性，产生双折射现象，这称为**光弹效应**（photoelastic effect）

或应力双折射。观察光弹效应的实验装置示意图及其干涉图如图 19.26 所示。

利用光弹性效应，通过观察干涉图样，可以定性确定透明物体内部的应力分布。在干涉图样中，干涉条纹越密集的地方，应力越大。光弹性效应在工程技术上有广泛应用。

2. 电光效应

所谓电光效应 (electrooptical effect)

就是指在电场作用下产生的双折射现象。电光效应可分为两种，一种称为克

尔效应 (Kerr effect)，它是在各向同性的

透明液体（如硝基苯、硝基甲苯）上

加上横向电场，并放置于两个正交的偏

振片之间，如图 19.27 所示，由于液体

在电场作用下变成各向异性的，产生了

双折射，所以光可以通过第二个偏振片。实验表明，在克尔效应中，光轴沿电场方向，

双折射的主折射率之差 $n_e - n_o$ 与电场强度的平方 E^2 成正比，所以线偏振光通过克尔盒以

后，分解出来的 o 光、e 光的相位差 $\Delta\phi_0$ 同样与 E^2 成正比，再由式 (19.8) 和式 (19.9)

可知，改变电场强度 E 的大小，即可改变透射光的振幅 $E_{\perp}$ 和光强 I ，从而能够实现对光

强的调制。

强的调制。

克尔效应的主要特点是响应时

间极短 ($<10^{-9}s$)，可用于制作高速

光开关。在高速摄影、光速测定、

光波调制中得到了广泛应用。它的

缺点就是硝基苯有毒、易爆，工作

电压高 (需几万伏高压)，使用起来

不太安全。

还有一种电光效应称为泡克耳

斯效应 (Pockels effect)，其中最典

型的是由磷酸二氢钾 (又称 KDP) 晶体和磷酸二氢铵 (又称 ADP) 晶体所产生的。这些

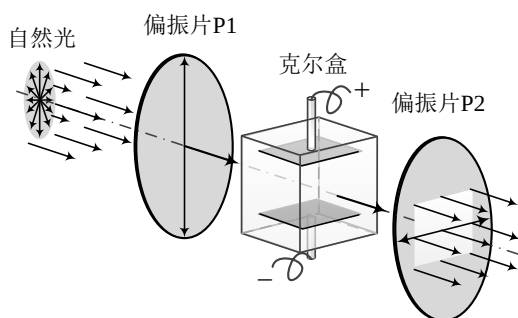


图 19.27 克尔效应示意图

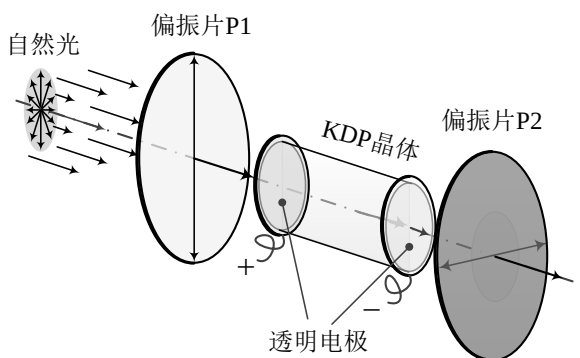


图 19.28 泡克耳斯效应示意图

晶体在自由状态下是单轴晶体，但在电场作用下变成双轴晶体，沿原来的光轴方向产生双折射效应。这种双折射效应与克尔效应不同，晶体的主折射率之差与电场强度的一次方成正比，所以这种效应也称为晶体的**线性电光效应**。它的特点是响应时间非常短，所需电压不太高，一般数千伏的电压即可产生显著的电光效应。利用 KDP 晶体制作的泡克耳斯盒已经被用于超高速快门和超高速光调制器中。

此外还有一些晶体在磁场作用下也会产生双折射效应，这称为**磁致双折射效应**。

* § 19.7 旋光现象

1811 年法国物理学家阿喇戈发现，当一束线偏振光沿石英的光轴方向传播时，它的振动面将以光线为轴线连续旋转一定的角度，这种现象称为**旋光现象**，如图 19.29 所示。后来，物理学家还发现某些液体（如糖溶液、酒石酸溶液、松节油以及某些药液等）也具有旋光现象。我们把能产生旋光现象的物质统称为**旋光物质**。此外，实验还发现旋光现象可分为右旋和左旋两种。迎着光的传播方向看，振动面顺时针方向旋转的物质称为右旋的，逆时针方向旋转的称为左旋的。例如天然的石英有右旋石英和左旋石英两种，它们的分子式都是 SiO_2 ，但是其内部分子排列不同，这两种结构的外形，除了一种是另一种的镜像外，在其他方面都相同，它们称为**旋光异构体**，如图 19.30 所示。

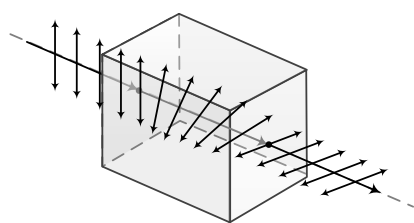


图 19.29 晶体的旋光现象

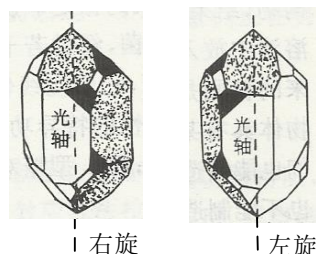


图 19.30 右旋和左旋石英

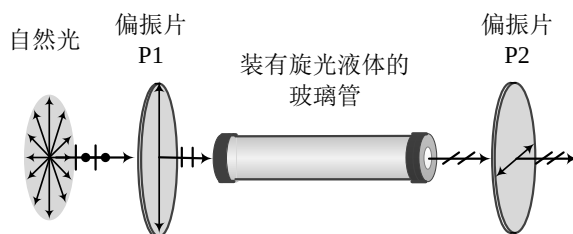


图 19.31 旋光仪示意图

图 19.31 是观察液体旋光现象的实验装置示意图。旋光现象的实验规律可归纳如下：

(1) 对于固体（如石英晶体）旋光物质，线偏振光的振动面旋转的角度 $\Delta\varphi$ 与旋光物质的厚度 L 有关，即

$$\Delta\varphi = \alpha L \quad (19.13)$$

式中， α 称为旋光率，是与旋光物质及波长有关的常量。

(2) 对于液体（如葡萄糖溶液）旋光物质，线偏振光的振动面旋转的角度 $\Delta\varphi$ 与旋光物质的透光长度 L 、溶液的浓度 c 有关，即

$$\Delta\varphi = \alpha c L \quad (19.14)$$

式中， α 是与旋光物质及波长有关的常量。

在制糖工业中，利用如图 19.31 所示的旋光仪，在已知 α 及 L 的条件下，只要测出 $\Delta\varphi$ ，即可利用式 (19.14) 算出糖溶液的浓度 c ，所以这种旋光仪又叫做**量糖计**，在化学及制药工业中有重要应用。

此外由于 α 与波长有关，如果用白光入射，则通过旋光物质后不同颜色的光振动面将分布在不同的平面内，这种现象称为**旋光色散**。在图 19.31 中，若用白光照射，旋转偏振片 P2 时，会出现不同的颜色。

磁致旋光

用人工方法也可以产生旋光现象，其中最重要的是磁致旋光。这是法拉第于 1846 年发现的，常称为法拉第旋转。实验表明，对于给定的磁性介质，线偏振光通过样品后振动方向转过的角度 $\Delta\varphi$ 与样品长度 L 和外加磁场的磁感应强度 B 成正比，即

$$\Delta\varphi = VLB \quad (19.15)$$

式中 V 称为费尔德常量，是一个与物质性质、环境温度及入射光的波长有关的量。

对于自然旋光物质，线偏振光振动面的旋转方向由物质特性决定，与光的传播方向无关。例如，当一束线偏振光往返两次通过同一块自然旋光物质时，其振动面还原为原来的方向。而磁致旋光与此不同，对于给定的物质，线偏振

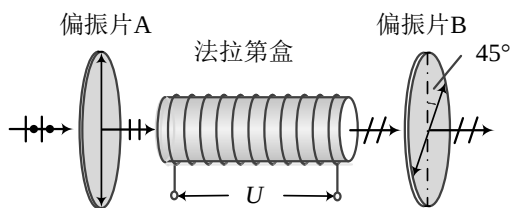


图 19.32 光隔离原理图

光振动面的旋转方向仅由磁场的方向决定。如果磁场的方向不变，当一束线偏振光往返两次通过同一块物质时，其振动面总是朝一个方向旋转。若光线第一次通过时，振动面旋转的角度是 $\Delta\varphi$ ，光线沿反向返回后，其振动面又继续旋转角度 $\Delta\varphi$ ，于是线偏振光在同一块旋光物质中往返两次后，其振动面共转过 $2\Delta\varphi$ 角度。

利用磁致旋光的这一特性可制成光隔离器——只允许光从一个方向通过，而不能从反方向通过的光阀门，其原理如图 19.32 所示。向右传播的光线，通过偏振片 A 后，进入一个法拉第盒(空心螺线管中置入能产生磁致旋光的物质)，再射向偏振片 B，并使两偏振片的偏振化方向的夹角为 45° 。调节磁感应强度 B ，使出射光的振动面刚好转过 45° ，光就能通过偏振片 B 向右射出。当光线从右向左入射时，线偏振光通过法拉第盒后，振动面也转过了 45° ，但刚好与偏振片 A 的偏振化方向垂直，故不能透过偏振片 A。

思考题

19.1 要使线偏振光的光振动方向旋转 90° ，最少需要几块偏振片？这些偏振片如何放置才能使透射光强达到最大值？

19.2 通常偏振片的偏振化方向没有标明，试问用什么方法可以简单的确定其偏振化方向？

19.3 自然光和圆偏振光都可以看成是两束强度相等、振动方向相互垂直的线偏振光的合成，它们之间的主要区别是什么？

19.4 汽车司机在行车时经常会佩戴一副偏振太阳镜，以减小眩目的路面反射光。试解释这一现象的原理并说明偏振镜片中偏振化的方向。

19.5 对陈列于玻璃橱窗的展品进行拍照时，拍出的照片常常会受到窗外灯光或明亮物体反射光的污染，用什么方法可以有效地消除照片上的光污染？

19.6 如何测量不透明物质的折射率？

19.7 如何鉴别自然光和圆偏振光？

19.8 获得线偏振光的方法有哪些？

19.9 如何获得圆偏振光？

19.10 如何判断一种透明介质是否具有双折射现象？

习 题

文档 19.1 第 19 章
光的偏振习题答案

19.11 部分偏振光可以看成是自然光和线偏振光的混合光。现让一束部分偏振光垂直通过一个偏振片，在以光线为轴线旋转偏振片时，测得透射光强的最大值是最小值的 5 倍，试求：该部分偏振光中自然光和线偏振光的光强之比以及光的偏振度。

19.12 一束强度为 I_0 的自然光垂直入射到叠放在一起的三个偏振片上。已知第一和第三个偏振片的偏振化方向正交，第二个与第一个的偏振化方向之间的夹角为 30° ，试求：

- (1) 透射光的光强 I 。
- (2) 要使透射光的强度达到最大，第一、第二个偏振片的偏振化方向之间的夹角为多大。

19.13 在两正交偏振片 A、B 之间插入另一个偏振片 C，并使其以光线为轴、以角速度 ω 旋转，透射光强 I 将被调制。试证明：以强度为 I_0 的自然光入射时， I 和 I_0 之间的关系为

$$I = \frac{I_0}{16}(1 - \cos 4\omega t)$$

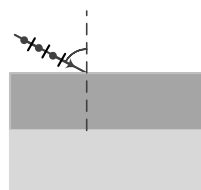
19.14 自然光通过两个偏振化方向成 60° 的偏振片，若每个偏振片把通过的光线吸收了 10%，试求：透射光强与原入射光强之比。

19.15 用两个偏振片分别作为起偏器和检偏器，当二者的偏振化方向成 30° 角时看一个光源和夹角为 60° 时看另一光源的光强相等，求这两个光源的强度之比。

19.16 测得从一池静水的表面反射出来的太阳光是线偏振光，求此时太阳处在地平线的多大仰角处？(水的折射率为 1.33)

19.17 如图所示，三种透明介质 I、II、III，其折射率分别为 $n_1 = 1.00$ 、 $n_2 = 1.43$ 和 n_3 ，它们之间的分界面相互平行。现有一束自然光从介质 I 中射入，要使在两层介质表面的反射光都是完全偏振光，试求：

- (1) 光的入射角 i ，并在图中画出反射光和折射光的偏振态；
- (2) 折射率 n_3 。



习题 19.17 图

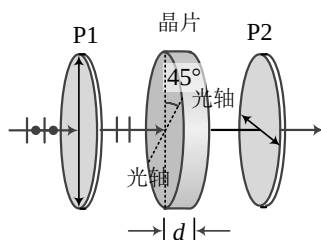
19.18 试计算用方解石晶体制成的对波长分别为 589.3 nm 的钠黄光和 546.1nm 的汞灯绿光的 $1/4$ 波片的最小厚度为多少？(方解石晶体的主折射率： $n_o = 1.6584$ ， $n_e = 1.4864$)

19.19 石英的主折射率分别为 $n_o = 1.5443$ 、 $n_e = 1.5534$ ，若要使波长为 600nm 的线偏振光垂直通过一块由石英晶体制成的波片后，变成以晶体的光轴方向为长轴的正椭圆偏振光，且椭圆的长短轴之比为 $\sqrt{3}:1$ ，试求：

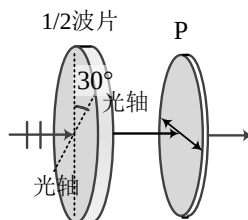
- (1) 波片的最小厚度；
- (2) 入射线偏振光的光振动方向与波片主截面的夹角 α 。

19.20 在二正交偏振片 P_1 和 P_2 之间插入一厚度为 $d = 0.025\text{mm}$ 的方解石晶片，晶体的光轴与晶片表面平行且与偏振片的偏振化方向成 45° 角，如图所示。已知方解石的 $n_o = 1.658$ ， $n_e = 1.486$ 。若用波长在 500nm 到 650nm 范围内的平行光束垂直照射偏振片 P_1 。并假设在上述波长范围内 n_o ， n_e 的值为常数，试求：

- (1) 通过图中三个元件之后, 哪些波长的光将发生消光现象?
- (2) 要使通过晶片后的光成为圆偏振光, 入射光的波长应满足什么条件?



习题 19.20 图



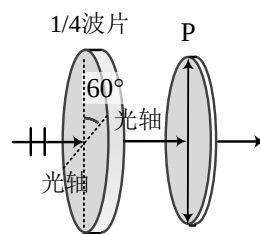
习题 19.21 图

19.21 如图所示, 强度为 I_0 的单色线偏振光垂直入射到一块光轴平行于表面的 $1/2$ 波片上, 其光振动方向与波片内光轴之间的夹角 $\alpha = 30^\circ$ 。从 $1/2$ 波片射出来的光再垂直入射到偏振片上。已知偏振片的偏振化方向与入射线偏振光的光振动方向互相垂直。试求:

- (1) 在波片内, o 光、e 光的相对强度之比 ($I_o : I_e = ?$);
- (2) 由偏振片透射出来光强。

19.22 如图所示, 光强为 I_0 的线偏振光依次垂直入射到光轴平行于表面的 $1/4$ 波片和偏振片 P 上, 其光振动方向与波片中光轴的夹角为 60° , 与偏振片的透光轴平行。试求:

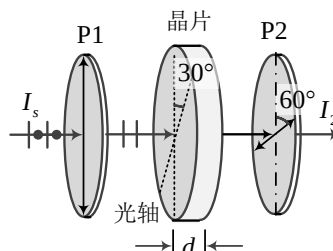
- (1) 波片内 o 光和 e 光的强度之比;
- (2) 若对于 $\lambda = 589\text{nm}$ 的钠黄光, 该晶体对于 o 光的折射率和 e 光的主折射率分别为: $n_o = 1.5443$, $n_e = 1.5534$, 求该波片的最小厚度;
- (3) 从偏振片 P 透射出来的光强。



习题 19.22 图

19.23 如图所示, 在两偏振片 P1、P2 之间插入一个方解石晶片, 两偏振片偏振化方向之间的夹角为 60° , 晶片的光轴与两偏振片偏振化方向的夹角都是 30° , 以强度为 I_s 钠黄光 ($\lambda = 589\text{nm}$) 垂直入射, 要使从第二偏振片 P2 射出的光强 I_2 最小, 试求:

- (1) 该晶片的厚度; (对于方解石晶体: $n_o - n_e = 0.172$, 要求算出两个最小的值);
- (2) 此时透射光强与入射光强之比值 I_2/I_s 。



习题 19.23 图

习题答案

19.11 $1/2, 2/3$

19.12 $I = \frac{3}{32} I_0; \alpha = \pm 45^\circ$

19.13 证明略

19.14 $I/I_0 = 243/800 = 0.304$

19.15 $1/3$

19.16 $\theta = 90^\circ - i_b = 36^\circ 57'$

19.17 $55^\circ 2'$, 图略; $n_3 = n_1 = 1.00$

19.18 $875.9\text{nm}; 810.7\text{nm}$

19.19 $d_{\min} = 16.5\mu\text{m}; \alpha = 30^\circ$

19.20 $6.1 \times 10^2 \text{ nm}, 5.4 \times 10^2 \text{ nm}; (n_o - n_e)d = k\lambda/4$

19.21 $1/3; I = \frac{3}{4} I_0$

19.22 $3; 0.0162\text{mm}; I = \frac{5}{8} I_0$

19.23 $d_1 = 3.42 \times 10^{-3} \text{ mm}, d_2 = 6.84 \times 10^{-3} \text{ mm}; I_2/I_s = 1/8$

第 20 章 狭义相对论

课件下载：第 20 章
狭义相对论

文档 20.1 爱因斯坦

引言

十九世纪下半叶，是经典物理学日臻完善，步入辉煌的年代。伽利略和牛顿创立的经典牛顿力学已经趋于完备；开普勒和第谷将那些天文学的定律，太阳系的运动规律已经完备地建立了起来；麦克斯韦、法拉第、基尔霍夫、赫兹、亥姆霍兹、基尔霍夫和菲涅耳等建立了完备的经典电磁场与电磁波理论；克劳修斯、开尔文、焦耳、玻尔兹曼和麦克斯韦等科学家也已经建立起经典的热力学及统计物理学理论，如此等等；整个经典物理学大厦似乎已经完备地建构起来了。当世人都沉浸在经典物理学的巨大成功并为此而欢呼时，物理学的晴空却出现了两团乌云，遮蔽了原本似乎月朗风清的穹顶。其一，是由经典电磁辐射理论得到的关于绝对黑体辐射的功率谱密度（单色辐出度）曲线出现了紫外发散，而与实验不符，称之为“紫外灾难”（ultraviolet catastrophe）。经典电磁理论的这一缺陷被普朗克的能量子假设及爱因斯坦（A. Einstein）的光量子理论所消弥，量子力学即发轫于此。其二，以太媒质的存在性假设是挽救电磁波作为某种机械弹性振动的理论的最后一线生机，却也成为压死骆驼的最后一根稻草。寻找以太媒质间接存在证据的迈克耳逊—莫雷实验得到了与预期相反的结论，这就是——被爱因斯坦狭义相对论所驱散的另一朵乌云。爱因斯坦的相对论带来了一场同样深刻的物理学革命——关于时间与空间，物质与运动的更深刻的本质联系的认识。

爱因斯坦，生于 1879 年 3 月 14 日，逝世于 1955 年 4 月 18 日。他出身于德国南部巴伐利亚地区乌尔姆镇一个犹太裔的家庭，是一位犹太裔物理学家。他一生颠沛流离，由于受到德国法西斯的种族歧视和政治迫害，他先后流落到瑞士，美国，比利时，并先后加入德国籍、瑞士籍和美国籍。爱因斯坦对近现代物理贡献多多，居功至伟。本章介绍他所创立的狭义相对论。



爱因斯坦创立的相对论可分为既相互联系、又相对独立的两个部分：狭义相对论（Special relativity）与广义相对论（General relativity）。狭义相对论适用于对物理量与物理规律在不同惯性系之间的协变性（Covariance）与不变性(Invariance)的描述，它适用于

不存在引力场的平直的欧几里得空间，即四维闵科夫斯基（Minkowsky）时空；广义相对论则是在等效原理和广义协变原理的前提下将狭义相对论推广到非惯性系，或者有引力场与物质存在的情形。它适用于两类非欧几何——罗巴切夫斯基几何与黎曼几何；前者可用于描述有排斥力场存在的时空，后者可用于描述有吸引力场存在的时空。我们生活的现实世界是万有引力充斥的空间，因而严格来说适用于黎曼几何。

§ 20.1 伽利略变换 绝对时空观 力学的相对性原理

在介绍狭义相对论之前，我们先来考察一下牛顿力学的时空观及其相对性原理。

20.1.1 伽利略变换与牛顿的绝对时空观

1、伽利略变换

在经典力学中，一个物理事件的发生与参照系的选择无关，但是对该事件发生的空间位置（坐标值）及其运动规律的描述却与参照系的选择有关。选取适当的惯性参考系 S ，在 S 系上取坐标系 $O-xyz$ ，假设有另一个惯性参考系 S' ，在 S' 系上取坐标系 $O'-x'y'z'$ 。

为简单起见，我们规定两坐标系中各对应坐标轴互相平行， x 轴和 x' 轴互相重合， S' 系相对于 S 系以速度 v

沿 x 轴作匀速直线运动，并以 O' 和 O 重合的时刻作为共同的计时起点 $t' = t = 0$ 。则某个物理事件 P 在 S 系中发生的时空坐标为 (x, y, z, t) ，而在 S' 系中发生的时空坐标为

(x', y', z', t') ，如图 20.1 所示。则这两组时空坐标之间有如下对应关系

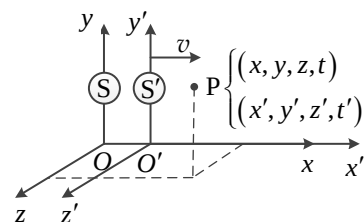


图 20.1 两个相互作用匀速运动的惯性参照系

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (20.1.1)$$

这就是经典的**伽利略时空坐标变换**，简称**伽利略变换**。必须注意， $t' = t$ 是经典时空观中的一个常识性判断，与我们的日常生活经验相吻合，是不能证明的。伽利略变换集中体现了牛顿的绝对时空观，具体体现为以下两点：

(1) 两个事件空间间隔的绝对性

首先来考查两个给定事件的空间间隔。如图 20.2 所示, 假设有一根刚性杆静止在 S' 中, 并沿 x' 轴放置。显然由于该杆相对于 S 系正在以速度 v 沿 x 轴运动。在 S 系中的观察者若要测量该尺的长度, 必须要在同一时刻

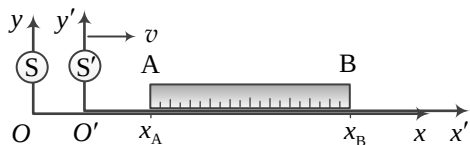


图 20.2 物体长度的测量

($t_A = t_B$), 同时测量杆两端的位置坐标 x_A 和 x_B , 则 $\Delta x = x_B - x_A$ 才能表示在 S 系中测得的杆的长度。由伽利略变换的第 1 式可得 S' 系中的观察者测得该杆的长度为

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = (x_B - vt_B) - (x_A - vt_A) = x_B - x_A = \Delta x$$

同理, 当杆在 S' 系中沿 y' 或 z' 轴放置时, 由伽利略变换的第 2、第 3 式同样可得

$$\Delta y' = \Delta y \quad \text{及} \quad \Delta z' = \Delta z$$

这表明在伽利略变换下, 任意两个给定事件的空间间隔具有绝对不变性, 与参照系的选择无关, 与物质的运动无关。

(2) 两个事件时间间隔的绝对性

由伽利略变换式(20.1.1)的第 4 式 $t' = t$, 可知在两个惯性参照系中所有校准好的时钟所显示的时间都是相同的, 与时钟所在的参照系无关。这表明测量任意两个物理事件的时间间隔同样与参照系的选择无关, 具有绝对不变性, 即: $\Delta t' = \Delta t$ 。

为此, 牛顿提出了著名的绝对时空观。

2. 牛顿的绝对时空观

牛顿的绝对时空观认为:

(1) 绝对的空间仅是一种容纳运动物质的“容器”, 是独立存在、永恒不变且绝对静止的——即存在一个绝对静止的惯性参考系。因此, 空间的量度与惯性系无关而且绝对不变, 并与其所容纳的物质及其运动完全无关。

(2) 绝对的时间就其本性而言与物质及其运动无关, 是永远均匀地流逝着的。因此, 在不同的惯性系中, 应当用统一的时间 $t = t'$ 来讨论问题; 同时性是绝对的, 并且一个物理过程的持续时间, 即时间间隔也是绝对不变的, 与观察者所在的参照系无关, 与物质的运动无关。

不难看出, 绝对时空观符合我们日常生活的体验, 似乎是正确的。但是近代物理实

验表明，当物体间的相对运动速度接近于光速时，绝对时空观与观察到的实验事实不符。

20.1.2 伽利略速度变换

将式（20.2.1）对时间取一阶导数，并注意到 $t' = t$ ， $dt' = dt$ ，即可得质点运动时的速度变换关系

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u_x = u'_x + v \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases} \quad (20.1.2)$$

式（20.1.2）称为伽利略速度变换。若将上式写成矢量形式，则有

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad \text{或} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \quad (20.1.3)$$

其中： $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$ 就是经典力学中的速度合成公式，它也可表述为：质点的绝对速度 $\mathbf{u}$ 等于相对速度 $\mathbf{u}'$ 与牵连速度 $\mathbf{v}$ 之和。

20.1.3 牛顿力学的相对性原理

现在我们从伽利略变换出发，来讨论经典力学的相对性原理。将式（20.1.2）对时间再取一阶导数，可得到质点运动时加速度的变换关系

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad (20.1.4a)$$

将上述变换式写成矢量式，则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (20.1.4b)$$

式（20.1.4）表明，质点的加速度在不同的惯性参考系中都是相同的，即加速度也是伽利略变换下的不变量。另一方面，经典力学认为物体的质量是与运动状态无关的常量，与参照系的选择无关，此外，经典力学还认为，力是物体与物体之间的相互作用，同样与观察者所在的参照系无关。因此，在两个相互作用匀速直线运动的惯性参照系中，牛顿运动定律的数学表达形式是相同的，即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$$

上式表明，在伽利略变换下牛顿运动定律的数学表达形式具有不变性。而在力学中，所有的力学规律和守恒定律都是牛顿运动定律的推论。这就是说，尽管质点的速度、动量和能量在不同的惯性参考系内是不同的，但是所有的力学规律在不同的惯性参考系中

都具有相同的数学表达形式，或者说，所有的惯性参照系对于力学规律来说都是等价的。这就是牛顿力学的相对性原理。

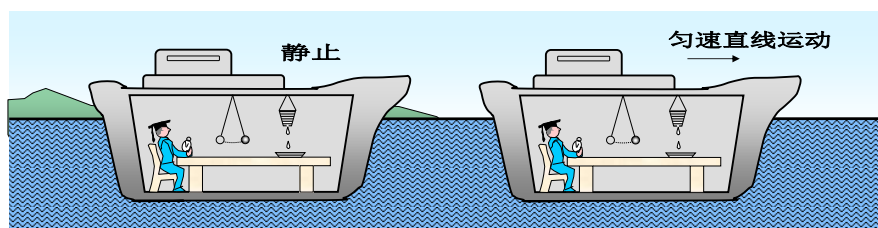


图 20.3 伽利略相对性原理

早在牛顿之前，伽利略就已经提出了力学的相对性原理。他指出：在一艘正在匀速航行的船舱（可视为一个惯性参照系）内部，如图 20.1.3 所示，所做的任何力学实验，均不能确定该船是静止的、还是处在匀速直线运动状态。所以牛顿力学的相对性原理也称为伽利略相对性原理。

牛顿力学的相对性原理具体体现了牛顿的绝对时空观。牛顿的绝对时空观认为：存在一个绝对静止的惯性参考系；而牛顿力学的相对性原理则认为：所有的惯性参照系对于力学规律来说都是等价的，用任何力学方法都找不到这个绝对静止的惯性参考系。在这里就已经暴露了牛顿力学理论的不自治。此外，人们还发现，在伽利略变换下，相对性原理仅局限于经典力学领域，不适用于电磁场。即电磁场所遵守的麦克斯韦方程组在伽利略变换下不满足数学形式不变性。这充分暴露了绝对时空概念的局限性与内在矛盾，也预示着一场物理学革命的降临！

§ 20.2 迈克耳孙-莫雷实验 以太论的破产

在 19 世纪末 20 世纪初，牛顿力学中关于机械波的传播原理已经深入人心，具有不可挑战的权威性。当时物理学家们相信声波是机械振动在媒质中的传播，离不开媒质。正因如此，真空中没有声波。出于对牛顿力学权威性的一种惯性服从，人们本能地认为光波、电磁波也是在某种媒质中传播的一种弹性机械振动，即以机械波传播的模式来解释电磁波的传播。由此人们自然地认为宇宙中应该存在一种被称为以太（Ether）的媒质。这种媒质是什么呢？我们看不见，摸不着，但它伴随着光，几乎无处不在。由于电磁波与光的传播速度如此之大——约为 $c = 2.9978 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，因此要求以太具有如下极端而又矛盾的特性：既有非常大的弹性模量，又有非常小的惯性密度，还必须是透明的。

于是人们设计并做了各种实验，企图寻找以太存在的直接或间接的证据。其中最著名的是 1881 年至 1887 年间，迈克尔逊 (A. A. Michelson) 与莫雷 (E. W. Morley) 所做的双光束干涉实验。他们试图通过测量地球相对于以太的速度来间接地证实以太的存在。

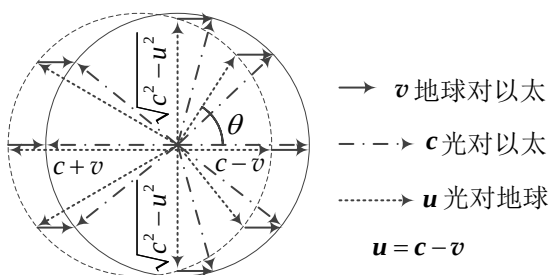


图 20.4 基于以太假设的光相对于地球的速度

基于以太假设，光在真空中沿各个方向相对于以太的速度大小均为 c 。若地球相对于以太的速度为 v ，由伽利略速度叠加原理可得，光相对于地球的速度为： $u = c - v$ 。由此光相对于地球沿不同方向的速度大小可以形象地用图 20.4 中的虚线表示出来。

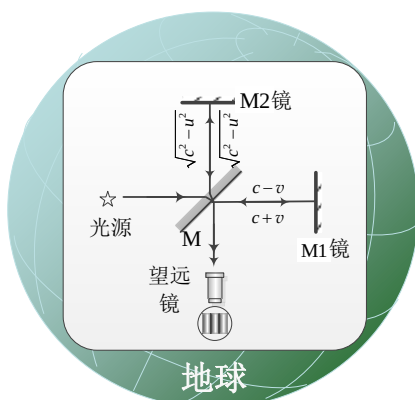


图 20.5 迈克尔孙-莫雷实验

迈克尔孙-莫雷双光束干涉的实验装置如图 20.5 所示。他们首先调整两臂长度，使两束光的有效光程相等，即 $l_1 = l_2 = l$ 。沿 MM_1 （图中东西）方向，光线往返的速度大小分别为 $c - v$ 与 $c + v$ ，总的传播时间为

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2cl}{c^2(1 - v^2/c^2)} \approx \frac{2l}{c} \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \quad (20.6)$$

光线沿 MM_2 （图中南北）方向往返的速度大小均为 $\sqrt{c^2 - v^2}$ ，总的传播时间为

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{2l}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \quad (20.7)$$

于是，来自两臂的光线由于传播速度不同，产生的光程差为

$$\Delta L = c\Delta t = ct_1 - ct_2 \approx c \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = l \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (20.8)$$

此时视场内可出现静态干涉条纹。随后，他们将整个实验装置绕竖直轴转动 90° ，在此过程中 MM_1 与 MM_2 交换角色，由此引起两臂光程差的变化为 $2\Delta L$ ，进而导致望远镜视场内的干涉条纹发生移动，并且条纹移动的根本数 ΔN 为

$$\Delta N = \frac{2\Delta L}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{条}) \quad (20.9)$$

上式表明，根据以太假设以及伽利略速度叠加原理，理论上预期的干涉条纹的移动条数与地球相对于以太的相对速度之间存在精确的函数关系。

在迈克尔孙-莫雷实验中，他们以地球绕太阳的公转速度 $v = 30\text{Km} \cdot \text{s}^{-1}$ 作为地球相对于以太的速度，并取臂长 $l = 10\text{m}$ ，并利用 $\lambda = 500\text{nm}$ 的光做实验。根据上述计算，理论上预期将会有大约 0.4 个干涉条纹的移动量。而迈克尔孙干涉仪的观测精度已达到了可测量 0.01 个条纹移动数。然而无论他们如何提高测量精度，或者改变实验的季节（因而具有不同的公转速度）与地点（因而具有不同的自转速度），却始终没有观察到预期的条纹移动数。

为了解释迈克尔孙-莫雷实验的结果，同时又能“拯救以太”，科学家们曾提出了许多理论和假设。其中最典型的两个就是“以太拖拽”假设和“长度收缩”假设。“以太拖拽”假设认为以太被地球完全拖拽，导致地球与以太之间的相对速度为零，所以在地球上测不到以太相对于地球的运动，从而解释了迈克尔孙-莫雷实验的结果。但这种“以太拖拽”假设却与一个有关光行差的观察实验和 1851 年的斐索实验相矛盾。在光行差观察实验中，实验结果表明，如果我们坚持以太假设，则只能认为以太完全不被地球所拖拽。1851 年斐索(H. L. Fizeau)在流动的水中做了对向运动的双光束干涉实验，实验结果表明以太将被水流部分拖拽。所以“以太拖拽”假设在三个不同的实验中得到了三个互相矛盾的结论，而这些实验结果却又是铁板钉钉的实验事实。1892 年，荷兰物理学家洛仑兹为了解释迈克尔孙-莫雷实验，又提出了“长度收缩”假设，即认为相对于以太运动的物体，其运动方向上的长度有一个按因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 的收缩。但是和所有其他假设一样，“长度收缩”假设也没有给出令人满意的结果。

爱因斯坦在深入研究经典力学和麦克斯韦电磁场理论的基础上，敏锐的认识到的要解

决上述矛盾，必须抛弃“以太”概念，因为它根本不存在，同时需要提出一个全新的物理学理论来解释光与电磁波的运动。于是，对以太的追寻最终促使爱因斯坦提出了光速不变原理和物理学相对性原理，狭义相对论就发轫于此。就这样，在旧的经典物理学的废墟之上，作为近现代物理基础与支柱之一的狭义相对论便浴火重生，物理学也经历了一次脱胎换骨，凤凰涅槃。

§ 20.3 狭义相对论的两个基本原理与洛伦兹变换

23.1.1 狭义相对论的两个基本原理

1905 年，爱因斯坦在实验的基础上，抛弃了以太假设和绝对静止参照系的想法，另辟蹊径，提出了**狭义相对论的两个基本原理**，即：

(1) **相对性原理**——在一切惯性系中，物理学定律都是相同的。也就是说，对于描述物理规律而言，所有的惯性参照系都是等价的。

(2) **光速不变原理**——真空中光的传播速度与观察者及光源的运动无关，在各个方向上都等于 c 。

爱因斯坦提出的相对性原理是出自于他对于自然规律的客观性、对称性和不变性的一种朴素的直觉与信念。他认为描述自然规律的理论应该是对称、简洁而普适的——即不依赖于惯性参考系的选取。此前伽利略早已提出了力学的相对性原理，即所有的力学规律在伽利略时空坐标变换下保持不变性。伽利略的时空坐标变换是牛顿力学相对性原理的充分条件，而非必要条件，也是牛顿绝对时空观的体现与表述。我们将看到，爱因斯坦从上述两个基本原理出发，导出的洛伦兹时空坐标变换既能保证力学的相对性原理，同时又能满足电磁学、光学及场论等领域的相对论不变性。所以狭义相对论的相对性原理是将惯性参照系的等价性，从力学规律推广到包含电磁学规律在内的所有物理学规律。

光速不变原理是爱因斯坦为打破困境，从而正确解释迈克尔逊—莫雷实验及其它一些实验结果所作的大胆假设。显然，光速不变原理与我们的常识不符，它直接否定了伽利略时空坐标变换、速度叠加原理。但是目前所有的光学实验、天文观测以及高能物理实验都直接或间接地证明了光速不变原理是正确的。

20.3.2 洛伦兹变换

爱因斯坦根据狭义相对论的两条基本原理，建立了一组新的时空坐标变换关系，通常称为**洛伦兹时空坐标变换**，简称**洛伦兹变换**，用于代替伽利略时空坐标变换。那为什么要把新的变换以洛伦兹命名呢？原来，早在 1904 年，洛伦兹在研究电磁场理论时就已经提出了这个变换。当时，洛伦兹提出这个变换的目的是为了解决电磁场的方程组从一个参照系变换到另一个参照系时，使真空中的光速保持不变的问题。但是在洛伦兹的理论中，变换所引入的量仅仅看作是数学上的辅助手段，不包含相对论的时空观。爱因斯坦与洛伦兹不同，他以观察到的实验事实为依据，从光速不变原理和相对性原理出发，重新导出洛伦兹变换，并赋予它崭新的物理内容，即由此提出了狭义相对论的时空观。由于洛伦兹对理论物理学的卓越贡献和特殊的人格魅力，人们仍然将这个变换以洛伦兹命名。

假设有两个惯性参照系 S 和 S'，其中惯性参照系 S' 沿 xx' 轴以速度 v 相对于 S 系作匀速直线运动，如图 20.6 所示，在两个惯性参照系的坐标原点重合的瞬间作为计时起点。若在某一个时刻，有一个事件发生在空间某点 P，从 S 系来看，该事件发生的时空坐标（在相对论中也称为世界点）为 (x, y, z, t) ；而从惯性

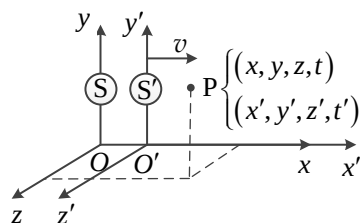


图 20.6 洛伦兹变换用图

系 S' 来看，其时空坐标为 (x', y', z', t') 。利用狭义相对论相对性原理和光速不变原理，可以导出这两组时空坐标的变换关系为

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (20.10)$$

其逆变换为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{array} \right. \quad (20.11)$$

式中 c 为真空中的光速， $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 称为相对论因子。式 (20.10) 和式 (20.11) 都称为洛伦兹变换。前者称为正变换，后者称为逆变换，它们显然是对称的和线性的。

20.3.2 对洛伦兹变换的讨论

简单分析一下洛伦兹变换，即可得到如下结论：

(1) 时间和空间是密切相关的不可分割的整体。从洛伦兹变换式中可以得到，任意两个物理事件的时间间隔和空间间隔在两个惯性参照系中的变换关系为

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + c\Delta t') \quad (20.12)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \quad (20.13)$$

这表明，时间与空间不再是互相独立的，而是一个密切相关、不可分割的整体，

(2) 时间和空间并不是绝对不变的，而是与物质的运动密切相关。

以上两点说明洛伦兹变换反映了相对论中关于时间、空间和物质运动三者具有紧密联系的新观念。由此爱因斯坦提出了狭义相对论的时空观（参见下一节：§ 20.4）

(3) 当 $v \ll c$ 时，洛伦兹变换可以自然的过度到伽利略变换。这说明经典的时空坐标变换是狭义相对论时空坐标变换在低速运动下的近似。在日常生活中，由于宏观物体的运动速度均远远小于光速，所以经典的时空观和牛顿力学都能准确成立。

(4) 光速是物体运动的极限速度。由洛伦兹变换式可知，当 $v > c$ 是，相对论因子 γ 为虚数，这使得变换没有实际意义（因为时空坐标只能取实数）。这表明任意两个惯性参照系的相对速度都不可能大于光速，所以光速是一切物体运动的极限速度。

20.3.3 洛伦兹速度变换

从洛伦兹时空坐标变换和速度的定义出发，可以推导出相对论中的速度变换。首先从洛伦兹变换（20.10）出发，将其四个变换式两边同时取微分，可得

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{cases} \quad (20.14)$$

又物体的运动速度在两个参考系中的定义分别为

在 S 系中

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (20.15)$$

在 S' 系中

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (20.16)$$

将位移与时间间隔的变换式（20.14）代入式（20.16），可得

$$\begin{cases} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{cases} \quad (20.17)$$

同理可求出速度的逆变换公式为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + u'_x v/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + u'_x v/c^2} \quad (20.18)$$

式（20.17）和式（20.18）狭义相对论中的速度变换关系。可以发现，在相对论中，速度各分量的变换再也不象伽利略速度变换那样相互独立地进行，而是有相互影响与依赖的关系。

例 20.1 试从相对论的速度变换公式出发，证明任意方向的光速都是不变的。

有些读者可能会质疑我们要证明的结论就是我们作为理论基础的基本假设之一的光速不变原理，而洛伦兹变换正是这一基本假设的推论。那么我们是否在犯循环论证的逻辑错误？回答是否定的。参见下一节（*20.3.4 洛伦兹变换的导出），在那里我们只用到了 x 方向的光速不变的假设，现在 we 再用其结论——洛伦兹变换式来证明任意方向光速也不变，这就不是循环论证了。为了简单起见，我们仅证明：在 Oxy 平面内任意方向上的光速都是 c 。

证明：如图所示，设在 S 系中坐标原点处的一个光源向真空中任意方向射出一个光子，即 $u=c$ 。不失一般性，设其轨迹在 Oxy 平面内，并与 x 轴的夹角为 θ ，而 S' 系相对于 S 系沿 x 轴以速度 v 运动；则在 S 系中该光子的速度矢量为

$$\mathbf{u} = c \cos \theta \mathbf{i} + c \sin \theta \mathbf{j}$$

即

$$u_x = c \cos \theta ; \quad u_y = c \sin \theta ; \quad u_z = 0$$

根据相对论速度变换公式 (20.17)，在 S' 系中，该光子运动速度的三个分量的大小分别为

$$u'_x = \frac{c \cos \theta - v}{1 - \frac{vc \cos \theta}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - \frac{vc \cos \theta}{c^2}}, \quad u'_z = 0 \cdot \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - \frac{vc \cos \theta}{c^2}} = 0$$

于是，在 S' 系中该光子速度的大小为

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$$

将上述三个分量式代入上式，整理可得

$$u' = c$$

即任意方向光速不变的命题为真。

例 20.2 地面上的观察者发现两艘宇宙飞船正在同一直线上相向飞行。设飞船甲的速度为 $v_{\text{甲}} = 0.9c$ ，飞船乙的速度为 $v_{\text{乙}} = -0.9c$ 。试求：飞船上的观察者测得两飞船之间的相对速度。

分析：按照经典的伽利略速度叠加原理，两飞船之间的相对速度应为 $u = 1.8c$ 。显然这个结论与任何物体的运动速度都不可能超过光速的实验事实相矛盾。所以本题应该用洛伦兹速度变换来求解。

解：我们以飞船乙作为 S 系，地面作为 S' ，飞船甲的运动方向作为 x （或 x' ）轴的

正方向。则由题意可知： $v = -v_{\text{乙}} = 0.9c$ ， $u'_x = v_{\text{甲}} = 0.9c$ ， $u'_y = u'_z = 0$ ，由洛伦兹速度变换，可得

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + \frac{0.9c \times 0.9c}{c^2}} \approx 0.994c < c$$

$$u_y = u_z = 0$$

所以飞船上的观察者测得他们之间的相对速度为 $0.994c$ 。

*20.3.4 洛伦兹变换的推导

在推导洛伦兹变换时，必须认识到的是：首先它是建立在光速不变原理和相对性原理这两个狭义相对论基本假设基础上的坐标变换；其次该变换必需具有线性变换和对称性两个基本变换性质。所谓线性变换是指在不同惯性系之间变换时，系统的空间结构不发生非线性畸变，而具有某种仿射相似性，即不发生拓扑结构变化；此外，变换必须满足一一对应的关系，就是说对于 S 系中的一个事件 $P(x, y, z, t)$ ，在 S' 系中有而且仅有 $P'(x', y', z', t')$ 与之对应，而不会出现有两个事件 P'_1 、 P'_2 与 P 同时对应的情况。举一个例子，假如我们将地面作为惯性系 S 系，地面上的观察者在某一个时刻某一个地点（例如高速铁路边上）发现一只老虎，则高速火车上（可视为另一个惯性参照系）的观察者是不可能在一个时刻、两个地点同时发现这只老虎的。因而变换必须是一一对应的，而只有线性变换才能保证一一对应的变换要求。所谓变换的**对称性**是指变换所涉及的各惯性系之间是**平权的**，变换本身又是**可逆的**。

下面，我们以爱因斯坦的两个基本假设为前提条件，来推导洛伦兹时空坐标变换。

首先我们假设 S' 相对于 S 以速度 v 沿 x 轴正方向运动，如图 20.6 所示，并规定两坐标系的坐标原点 O 、 O' 重合的时刻为两个惯性系 S 及 S' 共同的时间零点，并且假设分布在两个参考系中各地的时钟都经过了时间校准（即所谓的时钟同步化操作，这对于建立洛伦兹变换是重要而且不可或缺的一步）。

对于 S 系的坐标原点 O ，其在 S 系中的运动学描述为

$$x = 0$$

在 S' 系中的运动学描述为： $x' = -vt'$ ，即

$$x' + vt' = 0$$

这两个等式具有等价性，它们同真同假。又因为变换为线性变换，因此可以合理地猜测（注意这不是严格的数学推理，而是从特殊性到一般性的尝试），对于任一事件 P 的时空坐标的变换应满足

$$x = \gamma'(x' + vt') \quad (20.19)$$

同理，对 S' 系的坐标原点 O' 点的运动学描述，在 S 系中为： $x = vt$ ，即

$$x - vt = 0$$

在 S' 系中为

$$x' = 0$$

它们也同真同假。因而也可以合理地猜测对任意一个事件 P 的时空坐标的变换应满足

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (20.20)$$

假设一个光子在原点 O 及 O' 重合的时刻（ $t_0 = t'_0 = 0$ ），自原点 O 、 O' 处沿 $x(x')$ 轴向射出。根据爱因斯坦的光速不变原理，它不依赖于光源及观察者的运动。则在某一时刻，该光子在 S' 系中的坐标为

$$x' = ct'$$

在 S 系中的坐标为

$$x = ct$$

又由变换的对称性及可逆性可知

$$\gamma = \gamma' \quad (20.21)$$

将以上二式分别代入式（20.19）和式（20.20），并应用式（20.21）（因为特殊事件符合普遍的变换规律），可得

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$$

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v)$$

将以上二式左右两侧分别相乘，消除两侧公因子，并整理可得

$$c^2 / (c^2 - v^2) = \gamma^2$$

因而有（出于物理的考虑，去掉负根）

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (20.22)$$

又由式（20.19）和式（20.21），可得

$$t' = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\gamma} - x' \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - vt) \right) = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (20.23)$$

另一方面, 由于两个参考系之间在 Y、Z 两个方向没有相对运动, 因而可以断定同一事件的 y、z 坐标在两个参考系中没有变化, 亦即

$$y' = y \quad ; \quad z' = z \quad (20.24)$$

总结起来, 对同一事件而言, 从 S 系中时空坐标 (x, y, z, t) 到 S' 系中的时空坐标 (x', y', z', t'), 有如下变换

$$\text{从 S 系} \rightarrow \text{S' 系:} \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{cases} \quad \text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (20.24)$$

同理可知, 其逆变换为

$$\text{从 S' 系} \rightarrow \text{S 系:} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{cases} \quad \text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (20.25)$$

这就是我们要导出的洛伦兹变换, 前者称为正变换, 后者称为逆变换。它们显然是对称和线性的。该变换最初 (1904 年) 由洛伦兹在旧的时空概念框架内, 为了解释迈克尔孙-莫雷实验的零结果, 通过假设物体相对于以太运动时沿运动方向有长度收缩提出的。1905 年, 爱因斯坦在其两个基本假设的前提下自然地导出了同样的关系式, 同时利用新的时空概念对上述变换的物理意义给出了全新的诠释, 因而这一变换被称为爱因斯坦—洛伦兹变换, 简称洛伦兹变换。

§20.4 狭义相对论的时空观

20.4.1 同时的相对性与相对论因果律

1 同时的相对性与时序的相对性

为了便于理解，我们以一列相对于地面作高速运动的爱因斯坦列车为例来进行讨论。所谓爱因斯坦列车就是一列速度接近于光速的高速列车，如图 20.7 所示。假设在列车车厢的正中间有一个闪光灯，在某一个时刻同时向车厢的前后壁发出闪光。试问：地面（S 系）和车厢（S' 系）中的观察者是否都认为车厢的前后壁能**同时**接收到光信号？

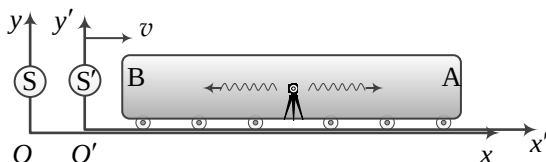


图 20.7 爱因斯坦列——同时的相对性

对于列车上（S' 系）的观察者来说，由于光向前和向后的传播速度相同，所以车厢前壁 A 和后壁 B 将同时接收到光信号，即 S' 系中的观察者测得车厢前壁和后壁接受到光信号的两个事件是同时发生的。

但对于地面上的观察者来说，车厢的前后壁随列车一起在向前运动，且光的传播速度与参照系无关，均是 c ，故光达到后壁 B 时传播的距离小于到达前壁 A 时传播的距离。所以地面（S 系）中的观察者测得车厢的后壁将先于前壁接收到光信号，即 S 系中的观察者认为车厢接收到光信号的两个事件不是同时发生的。

这个例子表明，按照狭义相对论的时空观，**在一个参照系中不同地点、同时发生的两个事件，在其他参照系中的观察者来看一定不是同时发生的。这就是同时的相对性。**显然，同时的相对性，是由光速不变原理造成的。

上述例子，我们也可以从洛伦兹时空坐标变换中得出。设在 S 系和 S' 系中，车厢前壁 A 接受收光信号的时空坐标分别为 (x_1, t_1) 和 (x'_1, t'_1) ，车厢后壁 B 接收到光信号的时空坐标分别为 (x_2, t_2) 和 (x'_2, t'_2) 。由已知条件可知：

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0 \quad \text{且} \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1 < 0$$

所以由洛伦兹变换可得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) = \gamma \cdot \frac{v}{c^2} \Delta x' < 0$$

即： $t_2 < t_1$ ，所以地面上的观察者认为车厢后壁 B 先接收到光信号。

实际上，按照相对论的时空观，对于两个没有直接或间接因果关系的**独立事件**，不

仅同时具有相对意义，它们发生的先后顺序也具有相对性，这称为**时序的相对性**。

现假设在S系中有两个事件 P_1 、 P_2 ，其时空间隔分别为： $\Delta x = x_2 - x_1$ ， $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ ，即S系中的观察者认为事件 P_1 先发生。则在S'系中，两事件发生的时间间隔为：

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \quad (20.27)$$

显然只要能满足 $\Delta t < \frac{v}{c^2} \Delta x$ ，就能使 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$ ，即在S'系中，事件2先发生了，也就是说在S和S'系中，这两个没有任何直接或间接因果关系的独立事件发生的先后顺序发生了颠倒。

当然，对于具有**直接因果关系**或**间接因果关系**的**关联事件**，例如人的生与死、飞机的起飞与降落之间具有直接的因果关系。因为有生就有死，有起就有落，它们之间的先后顺序是不可颠倒的。再例如：假设有两个男孩小敏和约翰分别出生于中国与美国，他们的出生本来是风马牛不相及的两个事件，显然不具有直接因果关系，但假如小敏在中国北京出生的同时，有一架飞机恰在北京起飞，而约翰在美国纽约出生的同时，这架飞机刚好在美国纽约降落，则小敏、约翰两男孩的出生这两个事件通过这架飞机的起与落建立了某种间接因果关系，因而它们之间的先后顺序也是不可颠倒的。这种关联事件之间先后顺序的不可颠倒同样可以由相对论证明。

我们不妨假设，在S系中，事件 P_1 代表电磁波的发射，事件 P_2 代表电磁波的接收，如图20.8所示。则

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$$

且

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$$

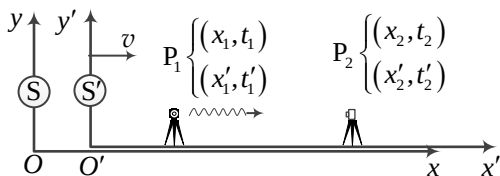


图20.8 电磁波的发射与接收
——关联事件的先后顺序不可颠倒

如果在S'系中，发现这两个事件发生的先后顺序颠倒了（电磁波还没发射就已经被接收到了，当然这是荒谬的！），即 $\Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$ ，则由式（20.27）可以得到： $v > c$ 。显然，这个结论不符合相对论的推论——光速是一切物体运动的极限速度。所以**关联事件的先后顺序是不可颠倒的**。

20世纪九十年代曾经盛行一时的某些科幻小说中曾有过这样的描述——乘坐光子火

箭逆时而动，我们可以回到“煮酒论英雄”的三国时代，去和三国英雄煮酒论道，这是不可能的。九十年代美国的某些科幻大片中，主人翁巧入时间隧道回到先人的时代，与早已亡故的先辈重演人间悲喜，这也是根本不可能的。因为这些都与狭义相对论的因果律理论相违背。所以历史之箭是不可逆转的！

总之，在狭义相对论中，同时概念具有相对意义，在一个参照系中不同地点、同时发生的两个事件，在其他参照系中一定不同时；对于两个没有直接或间接因果关系的独立事件，他们的先后顺序也是相对的；但是具有直接或间接因果关系的关联事件之间的先后顺序是不可以颠倒的（reversible）。

*2. 时空间隔与爱因斯坦光锥

*（1）时空间隔不变性

所谓两事件之间的时空间隔是指由两事件的空间间隔与时间间隔所定义的一个与参考系无关的物理量。假设 P_1 、 P_2 是两个事件，它们在 S 及 S' 系中的空时坐标（也称为世界点）分别为

$$\text{在 } S \text{ 系中: } \begin{cases} P_1(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ P_2(x_2, y_2, z_2, t_2) \end{cases} \quad \text{在 } S' \text{ 系中 } \begin{cases} P_1(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) \\ P_2(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) \end{cases}$$

则 S 系中两个事件 P_1 、 P_2 的时空间隔的平方定义为

$$(d_{21})^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] \quad (20.26)$$

同理可得， S' 系中的时空间隔的平方定义为

$$(d'_{21})^2 \equiv c^2(t'_2 - t'_1)^2 - [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]$$

利用洛伦兹变换，可以证明

$$(d_{21})^2 = (d'_{21})^2 \quad (20.27)$$

即在洛伦兹变换下任何惯性参考系中两事件之时空间隔的平方具有不变性，也称时空间隔不变性，它是一个相对论不变量。而在伽利略变换下，不变的是两个事件的空间间隔和时间间隔。

*（2）时空间隔的分类

下面，从时空间隔平方不变性 $d_{21}^2 = d'^2_{21}$ 出发，根据间隔 d_{21}^2 的正符号对两事件的间隔

类型及其时序关系进行分类讨论。

$d_{21}^2 = d_{21}'^2 > 0$ 时，称两事件之间具有**类时间隔**（time-like）。这是因为此时从理论上来说，总存在一个参考系 S' ，使这两事件 P_1' 、 P_2' 发生在 S' 系中同一地点不同时刻，如同被一段纯粹的时间间隔开，并保持

$$d_{21}^2 = d_{21}'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 > 0$$

不变，故谓之**类时间隔**。

凡是具有类时间隔的两个事件一定有直接或者间接的因果关系，其先后顺序是不可颠倒的。

$d_{21}^2 = d_{21}'^2 = 0$ 时，称两事件之间具有**类光间隔**。具有类光间隔的两事件 P_1 、 P_2 之间也可能具有直接或间接因果关系，且在具有因果关系时它们之间的影响必以光速联系，如电磁波的发射与接收，所以它们的时序也是不可颠倒的。

$d_{21}^2 = d_{21}'^2 < 0$ ，称两事件之间具有**类空间隔**。此时理论上总存在一个参考系 S' ，它使 $t_2' = t_1'$ ，而保持时空间隔的平方

$$d_{21}^2 = d_{21}'^2 = -[(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2] < 0$$

不变；也就是说，当两事件空间间隔足够大或其时间间隔足够小时，它们在 S' 系中如同被一段纯粹的空间距离所隔开，故谓之**类空间隔**。

具有类空间隔的两事件不可能具有直接或间接的因果关系，它们的先后顺序是可以颠倒的，因为事件之间的相互影响最快以光速传递，对于具有类空间隔的两事件，即使以光信号传递，我们也无法将它们的世界点连接起来。

总之，具有类时或类光间隔是两个事件之间具有直接或间接因果关系的必要条件；而具有类空间隔的两个事件之间是绝对不可能具有因果关系的，因而它们之间的先后顺序是可以颠倒的（reversible）。

（3） 爱因斯坦光锥及其意义

宇宙间所有事件之间的时序按间隔大小进行分类，可以用两个顶点相对的光锥来描述，此即所谓爱因斯坦光锥，如图 20.9 所示。选取某个事件的世界点为光锥顶点，代表此时此刻，即现在（Present）。光锥的轴线正方向指向未来（Future），轴线负方向指向过去（Past），与光锥的轴线垂直的方向则代表空间的方向。严格而言爱因斯坦光锥是四维

空间的一个超双曲面。但我们无法在三维空间画出，只能画出这一超双曲面在（2+1）维空间的投影。

宇宙间古往今来所有事件的世界点，按照它与光锥顶点所代表的事件之间的**时空间隔的平方**（ d_{21}^2 ）的大小与符号的不同，分布在上下光锥锥面内外的不同点。锥面外的任何一个事件与锥面顶点事件之间 $d_{21}^2 < 0$ ，是类空间隔，其时序是相对的。锥面上的事件与锥体顶点事件之间 $d_{21}^2 = 0$ ，属于类光间隔。

锥体里面任何一个事件与锥体顶点事件之间 $d_{21}^2 > 0$ ，属于类时间隔。由于类光间隔和类时间隔事件的时序是绝对的，故上半锥体内的事件是绝对未来事件，下半锥体内的事件是绝对过去事件。

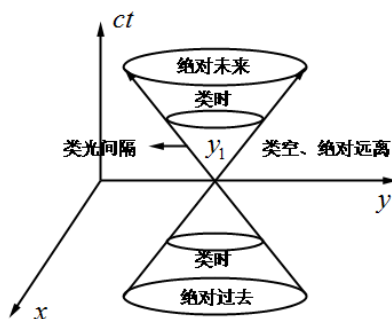


图 20.9 爱因斯坦光锥

20.4.2 长度收缩

对物体长度或体积的量度是绝对的吗？我们的日常生活经验告诉我们，这毫无疑问是正确的。但在狭义相对论中却并非如此！——长度的测量依赖于测量者和被测物体之间的相对运动情况。在讨论这一问题之前，我们必须先规定一下测量的内涵。问题的关键在于测量的“同时性”，即在同一惯性系内同时测量运动物体两端的空间坐标是测量运动物体长度的必要条件和基本约定，否则长度测量也就失去了其意义。比如一列开动的火车，地面参照系中的观察者今天某时测量其车尾的空间坐标，明日某时测量其车头的空间坐标，其坐标之差显然不能用于描述火车的长度。所以，当火车相对于某参照系运动时，该参照系中的观察者只有同时测量这列火车车头与车尾的位置坐标，其差值才能表示观察者测得的火车长度。需要说明的是，仅当观察者与被测物体相对静止时，才可以不考虑测量的同时性要求。我们将待测物体相对于观察者静止时，观察者测得的长度称为**固有长度**，用 L_0 表示；而将物体运动时，观察者测得的长度称为**非固有长度**或**运动长度**，用 L 表示。

如图 20.10 所示， S' 系相对于 S 系以速率 v 沿 x 轴正向运动。在 S' 系中沿 Ox' 轴方向放置一根**固有长度**为 L_0 的长杆 AB ，它刚性地固定于 S' 系的 Ox' 轴上，其左右两端的坐标分别为 x'_A, x'_B ，则固有长度为

$$L_0 = x'_B - x'_A$$

设 S 系中的观察者（至少在 AB 处各有一个观察者）在某一时刻 t 同时测得该运动长杆两端的坐标分别为 x_A 、 x_B ，则 S 系中的观察者测得该长杆的**运动长度** L 为

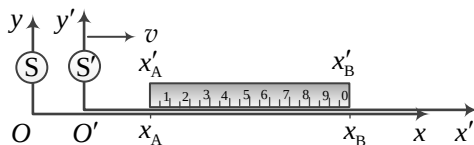


图20.10 长度收缩

$$L = x_B - x_A$$

根据相对论时空坐标变换公式

$$x'_A = \gamma(x_A - vt_A) \quad \text{及} \quad x'_B = \gamma(x_B - vt_B)$$

并注意到 $t_A = t_B$ （测量同时性的要求），将以上二式相减可得

$$L_0 = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A) = \gamma L$$

即

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot L_0 \quad (20.28)$$

不难看出： $L < L_0$ 。即物体在运动时观测者测得的长度小于该物体静止时的固有长度。这称为**长度收缩效应**。

须说明的是：（1）长度收缩效应是一种相对论效应，并非杆在运动时受外力作用产生了机械形变。（2）由于运动的相对性，长度收缩效应同样具有相对性，即当杆静止于 S 系中时，S' 系中的观察者同样测得它沿运动方向长度缩短了。（3）长度收缩效应只发生在运动方向上，在垂直于运动方向上没有长度收缩效应，这是因为 $\Delta y = \Delta y'$ 、 $\Delta z = \Delta z'$ 的缘故。（4）当 $v \ll c$ 时， $L \approx L_0$ ，即长度收缩效应可以忽略不计。我们生活于一个低速的世界，因此在日常生活中没有运动物体长度收缩这种相对论效应的切身体会。

例 20.3 如图 20.11 所示，在一艘爱因斯坦宇宙飞船上有一根固有长度为 L_0 的杆状天线，该天线的姿态（即天线与飞船前进方向的夹角）为 $\alpha = 30^\circ$ 。地面上的观察者测得该飞船正以 $v = 0.8c$ 的速度自西向东飞行。试求：地面上的观察者测得该天线的长度及姿态。

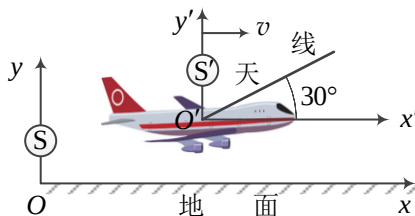


图20.11 例20.3图

解：在飞船参照系（设为 S' 系）中，此杆状天线在 x' 、 y' 方向的长度分别为

$$L_{x'} = L_0 \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} L_0$$

$$L_{y'} = L_0 \sin \alpha = \frac{1}{2} L_0$$

由于物体只是沿运动方向上有长度收缩，垂直于运动方向上没有收缩，所以地面上的观察者测得该杆沿 x 、 y 方向的长度分别为

$$L_x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot L_{x'} = \sqrt{1 - 0.8^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L_0 = \frac{3\sqrt{3}}{10} L_0, \quad L_y = L_{y'} = \frac{1}{2} L_0$$

所以，地面上的观察者测得该天线的长度为

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \frac{\sqrt{52}}{10} \cdot L_0$$

其姿态（与 x 轴的夹角）为

$$\theta = \arctan \frac{L_y}{L_x} = \arctan \frac{1/2}{3\sqrt{3}/10} = \arctan \frac{5\sqrt{3}}{9} = 43.9^\circ$$

例 20.4 静止长度为 l_0 的车厢，以速度 v 相对于地面参考系 S 运动，一人在车厢的后壁相对于车厢以速度 u_0 向前推动一个小球，试求地面观察者看到小球从后壁运动到前壁的时间。

解：在地面参考系 S 中，根据相对论长度收缩的理论，运动车厢的长度为

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

又根据相对论的速度变换关系，车厢内的小球相对于地面的速度为

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}$$

因此在地面参考系 S 中，测得车厢内的小球相对于车厢的速度为

$$v = u - v = \frac{u_0 + v}{1 + u_0 v/c^2} - v = u_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + u_0 v/c^2}$$

于是，地面观察者看到小球从后壁运动到前壁的时间为

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) / \left(1 + \frac{u_0 v}{c^2}\right)} = \frac{l_0 \left(1 + \frac{u_0 v}{c^2}\right)}{u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

20.4.3 时间膨胀

1. 时间膨胀

如同对长度的测量有所规定一样，我们也必须首先规定一下时间测量的内涵。我们规定在两个惯性参照系 S 和 S' 的坐标原点重合时，作为两个参照系的计时起点，并且每个参照系中各地的时钟都进行了同步校准，即 S 系中各地的时钟是同步的，同样 S' 系中各地的时钟也是同步的（当然，由于同时的相对性， S 系中的观察者发现 S' 系中的时钟一定不是同步的，反之亦然）。

如果两个物理事件在某个参照系中发生在同一个地点，则我们可以用处于该地的同一个时钟来测量这两个事件之间的时间间隔，这样的时间间隔称为**固有时间**，用 τ_0 表示。而在任何其他参照系中这两个事件一定发生在两个不同的地点，测得的时间间隔称为**非固有时间**，用 τ 表示。特别注意的是非固有时间一定是在同一个参照系中，两个不同地方的观察者用两个同步时钟测出的时间间隔。下面，我们从洛伦兹时空坐标变换来讨论固有时间和非固有时间之间的关系。

例如，一架从西向东飞行的飞机，如图 20.12 所示。坐在飞机上的某个乘客用他的时钟测得飞机从武汉上空飞到上海上空所需的时间称为固有时间 τ_0 ；而地面上的观察者（位于武汉和上海的两个观察者用他们当地的同步时钟）测得的时间间隔称为非固有时间 τ 。我们以飞机作为 S' 系，

在该系中，飞机飞到武汉上空（设为事件 P_1 ）和上海上空（设为事件 P_2 ）发生在同一地点，即 $x'_2 = x'_1$ ，且 $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ 。所以由洛伦兹变换可得地面上（ S 系中）的观察者测得两个事件之间的时间间隔为

$$t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

即

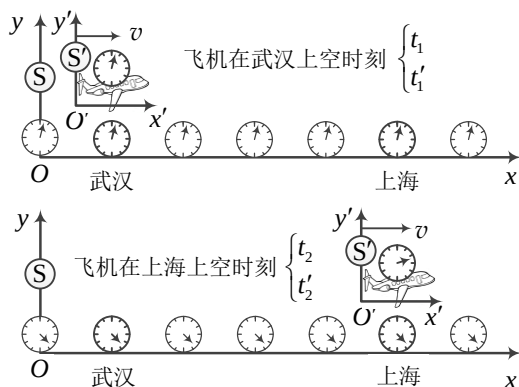


图20.12 运动时钟时间膨胀效应

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > \tau_0 \quad (20.29)$$

上式表明，相对于事件发生地点静止的时钟所测的固有时间 τ_0 最短，用相对于发生地运动的一系列同步时钟所测的非固有时间 τ 大于固有时间。形象地说，地面上的观察者发现相对于地面运动的时钟“走慢了”。这称为**运动时钟时间膨胀效应**，简称**时间膨胀效应**，或称**动钟变慢效应**。

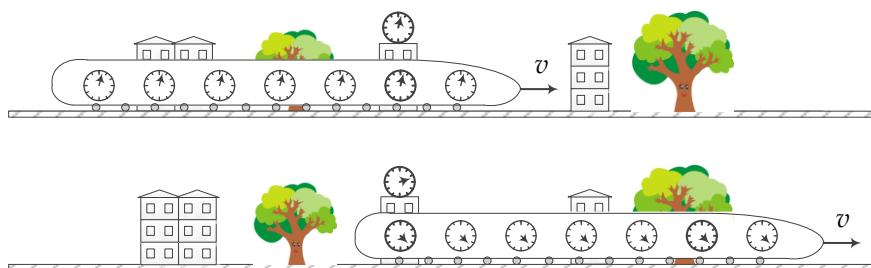


图20.13 时间膨胀的相对性
高速列车上的观察者用他们的同步时钟同样发现地面上的时钟也走慢了

必须强调：（1）与长度收缩效应一样，运动时钟的延缓效应仅是一种相对论的测量效应，它并不是由于时钟的运动带来了额外应力造成时钟机械运动状态的变化而产生的，它不影响事物本身的发展，仅供不同参考系之间对时间测量的参照比较。（2）时钟延缓效应也是相对论效应。地面上的观察者认为相对于地面作高速运动的时钟“走慢了”；反过来，相对于地面作高速运动的列车上的观察者认为地面上的时钟也“走慢了”，如图20.13所示。（3）当 $v \ll c$ 时， $\tau \approx \tau_0$ ，即时间膨胀效应可以忽略不计。因此在日常生活中我们一般没有必要考虑运动时钟的延缓效应。

同时的相对性、长度收缩、时间膨胀这些相对论的时空观似乎离我们的日常生活没有关系，其实不然。与我们现代生活关系密切的全球定位和导航系统，如果我们不考虑相对论效应，其导航和定位误差可达到几十米，而考虑了相对论（包括广义相对论）效应后，定位误差已经减小到了几米。如果再辅以其他修正技术，其定位精度有望可提高到厘米级。所以相对论离我们也不“很远”，而且到目前为止相对论中的所有预言都已经被实验所证实。

例 20.5 π 介子是一种不稳定粒子，会自发地衰变为 μ 子和中微子 ν ，假设某个 π 介子的寿命等于其平均固有寿命为 $\tau_0 = 1.77 \times 10^{-8} \text{s}$ 。现测得该 π 介子的运动速度为

$v=0.99c$ 。试求：(1) 实验室中的观察者测得该 π 介子能够飞行的平均距离；(2) 随 π 介子一起运动的观察者测得 π 介子能够飞行的平均距离，它能穿越宽度为 20 米的实验室吗？

解：(1) 实验室中的观测者认为，由于 π 介子相对于实验室作高速运动，根据运动时钟的延缓效应， π 介子的寿命延长为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

所以，实验室中的观察者测得该 π 介子能飞行的距离为

$$l = \tau v = \tau \times 0.99c \approx 38.6 \text{ m}$$

(2) 随 π 介子一起运动的观测者认为： π 介子的寿命没有变，仍然为 τ_0 ，而实验室却以 $v=0.99c$ 的速度在运动，所以该观察者测得实验室的宽度为

$$L = \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot L_0 = \sqrt{1-0.99^2} \times 20 \text{ m} \approx 2.82 \text{ m}$$

同时他认为在 τ_0 时间内， π 介子能飞过的平均距离为

$$l' = \tau_0 v = \tau_0 \times 0.99c \approx 5.26 \text{ m}$$

由于该距离大于他测得的实验室宽度，所以他认为 π 介子能穿越该实验室。当然实验室中的观察者同样认为 π 介子能穿越实验室。

本例表明，在 $\pi \rightarrow \mu + \nu$ 的物理过程中，同一物理过程的时空效应，对于不同运动状态的观测者来说，将以不同的形式表现出来：从实验室中的观测者来看，表现为运动时钟的延缓效应， π 介子的寿命变长了；在粒子质心系上的观测者来看，表现为长度收缩效应，实验室的长度缩短了。

例 20.6 试从长度收缩、时间膨胀的角度重新求解例 20.4。

解：对于随小球一起运动的观察者来说，球未动，而是车厢以速度 u_0 向后运动，所以他测得车厢的长度为

$$l' = l_0 \sqrt{1-u_0^2/c^2}$$

他测得小球运动到车厢前端的时间为

$$\tau_0 = \frac{l'}{u_0} = \frac{l_0}{u_0} \sqrt{1-u_0^2/c^2}$$

由于这个时间是观察者用相对于小球静止的时钟测得的，所以这是固有时间。又根据洛

伦兹速度变换式，小球相对于地面的速度为

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}$$

所以由运动时钟延缓效应，地面参照系中的观察者测得小球运动到车厢前壁所需的时间为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{l_0(1 + \frac{u_0 v}{c^2})}{u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

*2 时间的同步测量与被动观测

时间膨胀现象是一种相对论运动学效应，产生这一结果的原因是：观测者对时间的测量是在不同惯性系中用不同地方的时钟进行同步测量的结果，而并非某个人眼“观看”的结果。事实上“观看”与“测量”在物理学上具有不同内涵，“观看”是被动测量，是物体的图像在某时某刻进入视网膜的结果，而同步测量是假设各地的同步时钟对事物发展进行的同步测量，因此在相对论中“观看”与“测量”是不同的物理学行为。我们再不能对物体的运动作如下描述——“我看到物体从某时某地运动到某时某地”。当你“看到”某物某时在某处时，该物体已不在某处，因为物体的图像到达视网膜需要经历一段时间与空间。相对论中的同步测量恰恰避免了不同的观测者由于被动测量所造成的时间滞后效应，但是同步测量与被动观测之间是有定量联系的。

若 P_1 、 P_2 两事件在 S' 系中发生在同一地点，则在 S' 系中固定于该地点的时钟所测的时间间隔 $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ ，是这两事件的固有时间间隔；而在 S 系中， P_1 、 P_2 两事件发生在两个不同的地点， S 系中的观察者用这两个不同地点的同步时钟同步测量的时间间隔 τ 是非固有时间。根据前一节推导的结论，应有

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

而站在 S 系中某处（不妨设为原点 O 处）不动的人，他看到 P_1 处的事件发生于 $T_1 = t_1 + x_1/c$ 时刻， P_2 处的事件发生于 $t_2 + x_2/c$ 时刻，因此他在 S 系的原点 O 处被动“观看”到的时间差 ΔT 为

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T_2 - T_1 = \left(t_2 + \frac{x_2}{c} \right) - \left(t_1 + \frac{x_1}{c} \right) \\
&= (t_2 - t_1) + \frac{1}{c}(x_2 - x_1) = (t_2 - t_1) + \frac{v}{c}(t_2 - t_1) \\
&= (t_2 - t_1) \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \tau_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}
\end{aligned}$$

由上式结果可以看出：

- (1) 当 $v > 0$ ， $\Delta T > \tau_0$ ，观测者看到时间确实发生膨胀（运动的时钟走慢了）。
- (2) 当 $v < 0$ ， $\Delta T < \tau_0$ ，观测者看到的时间却发生收缩（运动的时钟变快了）！

这说明当我们看到运动的时钟远离我们而去，我们将“看到”运动的时钟比我们手上的时钟确实走慢了，时间是膨胀的；当我们看到运动的时钟向我们而来，我们将“看到”运动的时钟比手上的时钟反而变快了，即时间是收缩的（假如我们有足够的反应灵敏度能“看到”其差异的话）。这与“用 S 系中各地的同步时钟，对运动物体的时间进行**同步测量**得到的时间总是膨胀，与相对运动的方向无关”这一结论不符。同步测量与被动观测的本质区别也正是光学多谱勒效应这种物理现象的原因之所在——多谱勒效应就是固定的接收装置对运动的电磁波源被动检测的结果。电磁波（光波）的多谱勒效应在现代科学技术特别是军事技术中得到了广泛的应用，例如相控阵多谱勒雷达可对高空高速飞行的物体的速度、方向、高度进行实时测量，就利用了电磁波的相对论多谱勒效应原理。

*3 关于“孪生子佯谬”的讨论

下面再讨论另外一个有关相对论时间膨胀的著名的例子，这就是所谓“孪生子佯谬”。所谓佯谬，即似非而是。换言之，貌似乖谬，实为正确。

当时间膨胀现象被提出后人们曾提出过这样一个问题——甲、乙两个双胞胎兄弟，假设在他们 20 岁时，甲留在地球上（S 系），乙乘坐接近光速运动的高速飞船（S' 系，设 $\gamma=10$ ）远离地球而去，又假设乙用飞船内自己的时钟计时，运动了 5 年，而甲在地球上同步测量乙的运动时间应为 $\tau = \gamma\tau_0 = 10 \times 5 = 50$ 年，此时他在 S 系测得自己应有 $50 + 20 = 70$ 岁，而乙在飞船（S' 系）中所测自己的年龄只有 $20 + 5 = 25$ 岁。问题的矛盾之处在于，反过来，乙在其相对静止的 S' 系中观测到，地球（S 系）也以等速反向远离飞船，那么乙也可以对他们同胞二人的年龄得出类似的测量结果——当他在飞船所在的参

照系上进行同步测量，若甲在地球上（S 系）生活 5 年，则乙在飞船（S' 系）中同步测量自己的年龄也应为 $10 \times 5 + 20 = 70$ 岁！那么，当他们再次相遇时，到底谁更老？这就是著名的“孪生子佯谬”。

实际上，这一问题的阐述已超出了“狭义相对论”的范围而涉及到“广义相对论”的内容。但我们可以指出，甲、乙二人在他们各自的参考系中的测量都是正确的，他们得出的互相矛盾的结果是不同的参考系中测量的量值比较，并非同一参考系中进行面对面的比较。注意当乙在飞船（S' 系）中所测自己的年龄只有 $20 + 5 = 25$ 岁时，地球上的甲测得自己的年龄 $10 \times 5 + 20 = 70$ 岁。这个结果是使用了地面参考系中两个不同地点的同步时钟测量的结果。地球参考系在地面的一个钟记录了乙出发的时刻，当乙在飞船（S' 系）中自测运行 5 年时，地球参考系中在飞船外的另一个同步时钟记录其运行了 10×5 年。由于在狭义相对论中，他们一旦分开后不可能再次碰面，所以比较失去了意义。

要使兄弟俩能再次碰面，乙乘坐的飞船必须有一个加速发射，然后返航、减速、降落的过程。在这种一走一留的情形，甲乙兄弟二人的运动情况已不再具有对称性，因而他们之间的时间测量实际上失去了可比性——地球上的人是以逸待劳无须转向，而乙却身处强大的引力场中加速和减速，这就使得两个观测者互相测量和推断的对称性前提丧失了。文献中对于这个问题的争论旷日持久，这一问题既涉及狭义相对论，又涉及广义相对论，如果将问题局限于狭义相对论的范围，没有了加速、减速过程，则只能纸上谈兵，不具有现实意义。二十世纪六十年代所进行的 μ 子的衰变实验表明，其中运动一周之后返回的 μ 子确实比相对地球静止不动的 μ 子“年轻”一些，从而一劳永逸地结束了这一争论。这也许是“运动使人年轻”的论断在微观粒子世界的体现吧！

§ 20.5 相对论动力学

20.5.1 相对论中质量与速度的关系

首先让我们提出这样一个问题：若保留粒子质量 m 的绝对不变将导致怎样的矛盾？

从牛顿第二定律 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ ，以及 $v = v_0 + at$ 出发，不难得到：对于一个 $m \neq 0$ 的粒子，在恒力 F 的作用下，只要力的作用时间足够长，粒子的速率必定超过光速并趋于无穷大。显然，这个结论违背“有质量的粒子的速率不能超过光速”的实验事实。所以经典力学中

质量与速度无关的概念必须进行相对论修正。

在相对论中，根据相对论的速度变换关系，同时为了保证动量守恒定律在洛伦兹变换下对一切惯性参照系都成立，可以证明（证明从略）小球运动时具有的质量，简称**运动质量** m ，与其静止时的质量 m_0 之间必须满足如下关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \quad (20.30)$$

式 (20.30) 称为相对论中**质量与速度的关系式**，简称**质—速关系**。图 20.14 给出了 m/m_0 随 v/c 变化的关系曲线。

从式 (20.30) 或图 20.14 中可以看出，物体的运动质量随速度的增大而增大，当速度 $v \rightarrow c$ 时，只要 $m_0 \neq 0$ ，就有 $m \rightarrow \infty$ 。所以狭义相对论很自然地解释了“任何一个静止质量不为零的物体，其速度不可能超过光速”的实验结果。当小球的运动速度 $v \ll c$ 时， $m \rightarrow m_0$ ，只有当物体的运动速度与光速可比时， m/m_0 才明显地大于 1，

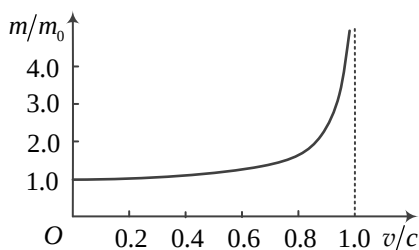


图20.14 质量与速度的关系

所以在宏观低速运动中可以不考虑质—速关系，而牛顿力学中的质量实际上就是物体的静止质量。

20.5.2 相对论动力学的基本方程

当引入了相对论质量的新概念之后，**相对论的动量**仍然定义为质量与速度的乘积，即

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (20.31)$$

关于力的定义，相对论中仍然保留牛顿在其《论自然哲学的数学原理》一书中对力的定义——作用于质点上的合外力等于其动量对时间的变化率，即

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \quad (20.32)$$

式 (20.32) 就是**相对论力学的基本方程**。由式 (20.30) 与 (20.32) 可知，当 $v \rightarrow c$ 时， $m \rightarrow \infty$ ，

所以随着速度越来越接近与光速，粒子的惯性质量越来越大，粒子则越来越难以加速，这与任何静止质量不为零的粒子的速率可以趋于光速，但一定不超过光速的结论是相符的，从而也保证了相对论理论的自洽性。

可以证明，式（20.32）在洛仑兹变换下具有不变性，即满足相对性原理，并且它在低速（ $v \ll c$ ）情形下很自然地过渡到牛顿第二运动定律。所以牛顿运动定律是相对论动力学在低速运动下的近似。

20.5.3 相对论动能公式和质能关系

1. 相对论的动能公式

在相对论力学中，动量守恒定律、角动量守恒定律、能量守恒定律仍然成立。下面，我们根据能量守恒定律，即作用于质点上的合外力所做的功等于质点动能的增量来导出相对论的动能表达式。

我们假设，一个静止质量为 m_0 的质点，开始时静止于 a 点，在合外力 $\mathbf{F}$ 的作用下运动到 b 点，并获得速度 $\mathbf{v}$ ，如图 20.15 所示。则在 t 时刻、 P 处，合外力 $\mathbf{F}$ 在元位移 $d\mathbf{r}$ 上对质点做的元功为

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \theta = F_\tau |d\mathbf{r}| \\ &= \frac{d(mv)}{dt} |d\mathbf{r}| = v \cdot d(mv) \end{aligned}$$

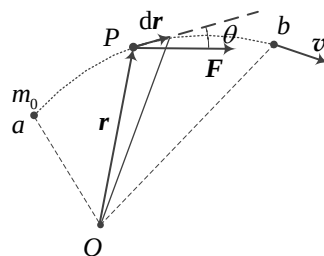


图20.15 推导相对论动能公式用图

式中 F_τ 是合外力 $\mathbf{F}$ 在切线方向上的分力。所以质点从 a 点运动到 b 点时，此合外力做的总功为

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^v v d(mv) = mv^2 \Big|_0^v - \int_0^v mvdv \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Big|_0^v - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

根据质点的动能定律，并考虑到质点从静止开始运动，其初动能为零，即

$$A = E_k - E_{k0} = E_k$$

由此可得，相对论的动能公式为

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \quad (20.33)$$

从形式上看，相对论动能公式和经典力学的动能公式完全不同。那么，相对论动能公式在非相对论情形下，即当 $v \ll c$ 时，是否依然适用？换句话说，相对论动能公式是否具有普适性？

为此，我们将式（20.33）作泰勒展开，可得

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right] m_0 c^2 \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \cdots - 1 \right] m_0 c^2 \approx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \cdots \right] m_0 c^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \cdots \end{aligned}$$

显然，在低速运动情况下，即 $v \ll c$ 时，上式中第 2 项以后的高次项均可忽略。于是就回到了我们所熟悉的经典力学中的动能公式： $E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$ 。这再次说明经典力学是狭义相对论在 $v \ll c$ 时的极限情形。

2. 质能关系

注意到相对论的动能公式中 mc^2 和 $m_0 c^2$ 均具有能量量纲，为此爱因斯坦引入了经典力学中从未有过的独特见解，他将 mc^2 称为粒子运动时具有的**总能量**，而将 $m_0 c^2$ 称为物体静止时的**静止能量**，并分别用 E 和 E_0 表示，即

$$E = mc^2 \quad E_0 = m_0 c^2 \quad (20.34)$$

式（20.34）称为相对论的**质量与能量关系式**，简称**质能关系**。由此可知，式（20.33）给出的**相对论动能就是物体运动时具有的总能量与其静止能量的差值**。

需要特别注意的是，在质能关系 $E = mc^2$ 中，总能量 E 包含了物体一切形式的能量，包括物体整体运动的动能、物体内部各粒子的动能、相互作用势能和化学能等。

3. 质能关系的物理意义

（1）质能关系反映了质量和能量之间存在着当量关系，表明质量和能量是物质的两个不可分割的属性。这表明哪里有质量，哪里就有能量，反之亦然；自然界没有脱离质

量的能量，也没有不含能量的质量。

(2) 质能关系是狭义相对论中最重要的结果，无论是在理论上或在实践中都有相当重要的意义。质能关系将物理学中原来不相干的质量守恒和能量守恒统一了起来，是人类利用原子能、核能的理论基础。

静止质量为 m_0 的粒子具有静止能量 $E_0 = m_0 c^2$ ，这是经典力学中所没有的，而且静止能量的数值相当大。例如 1kg 物质所具有的静止能量为

$$E_0 = m_0 c^2 = 1\text{kg} \times (3 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 9 \times 10^{16} \text{J}$$

这个数值相当于燃烧 3×10^6 吨煤所得释放的能量。目前，对于一个基本粒子的静止能量，人们还不能够做出详细的解释。在一般情况下人们也无法把静止能量全部释放出来做功。只有在物质和反物质的相互湮灭的过程中，或者核聚变与核裂变过程中，才能将物质的静止能量释放出来。

一般的复合粒子都是由多个更小的基本微观粒子构成的复合体系；将复合体的静止能量 $M_0 c^2$ 与各粒子的静止能量之和 $\sum_i m_{0i} c^2$ 进行比较，其差值称为复合体的**结合能**，并用 ΔE 表示，即

$$\Delta E = M_0 c^2 - \sum_i m_{0i} c^2 \quad (20.35)$$

如果复合体的结合能 $\Delta E < 0$ ，则复合体是稳定的。 $|\Delta E|$ 越大，体系越稳定。如果复合体的结合能 $\Delta E > 0$ ，则复合体是不稳定的，可以自行分裂为各个单独的粒子。

对于稳定的复合体系，各粒子静质量之和大于复合体的静质量

$$\sum_i m_{0i} - M_0 = \frac{|\Delta E|}{c^2} = \Delta M \quad (20.36)$$

两者的差值 ΔM 称为质量亏损。当两个静止质量较小的粒子结合成较大的稳定粒子时，由于存在质量亏损，所以结合过程会向外释放能量。

例 20.7 两静质量都是 m_0 的粒子以大小相等、方向相反的速度 v 互相接近并发生完全非弹性碰撞，求碰撞后复合粒子的质量。

解：根据动量守恒定律，可知该复合粒子是静止的。由能量守恒定律，可得

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = M_0c^2$$

其中, $\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ 为碰撞前每一运动粒子的相对论质量, M_0 为碰撞后复合粒子的静质量, 由此可得

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

因为上式中分母小于 1, 故 $M_0 > 2m_0$ 。所以复合粒子的静质量比两个粒子的静质量之和大! 这是由于碰前两粒子的动能通过非弹性碰撞过程, 转化为碰后形成的复合粒子的静止能量, 因此由质能关系可知系统的静止质量在碰撞后增加了。

本例说明系统的总动能 E_k 、静止能量 E_0 或静止质量 m_0 在碰撞前后并不守恒, 只有总能量 E 和与其相应的总质量 m 才是守恒的。本例还说明系统的动能与静止能量之间, 动质量与静止质量之间可以互相转化, 并且在转化过程中满足总能量守恒和总质量守恒。

例 20.8 已知电子的静止质量为 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 当电子以速度 $v = 0.8c$ 运动时, 试求:

(1) 电子的动能和动量

(2) 若电子的速度从 $v_1 = 0.8c$ 加速到 $v_2 = 0.99c$, 需要给电子做多少功?

解: (1) 利用相对论动能公式, 可得电子的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right) \\ &= 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} - 1 \right) (\text{J}) = 5.5 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.34 \text{ MeV} \end{aligned}$$

如果用经典的动能公式计算, 可得

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = 2.6 \times 10^{-14} \text{ J}$$

实验结果表明, 相对论的结论是正确的, 经典的结论是错误的。

电子的动量为

$$P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 5.2 \times 10^{-22} \text{ Kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 电子速度为 $v_1 = 0.8c$ 、 $v_2 = 0.99c$ 时，电子的动能分别为

$$E_{k1} = m_1 c^2 - m_0 c^2 \quad \text{和} \quad E_{k2} = m_2 c^2 - m_0 c^2$$

由动能定律可得，需对电子做功

$$\begin{aligned} A = E_{k2} - E_{k1} &= m_2 c^2 - m_1 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} \\ &= 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-0.99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} \right) (\text{J}) \approx 2.8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

例 20.9 已知质子 (p)、中子 (n)、氦核 (d) 的静止质量分别为 $m_p = 1.007277u$ ， $m_n = 1.008665u$ 和 $m_d = 2.0013553u$ ，其中 $1u = 1.660566 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 为原子的质量单位。试求氦核的结合能。

解：氦核是由一个中子和一个质子结合成的原子核。所以质子和中子在结合成氦核的过程中的质量亏损为

$$\Delta M = m_n + m_p - m_d = 3.96709 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

所以氦核的结合能为

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 = 3.570382 \times 10^{-13} \text{ J} \approx 2.23 \text{ MeV}$$

因而在氦核的形成过程中，有 ΔE 的能量被释放出来。

质量亏损并不是只限于原子核的聚变和裂变过程。任何物质的运动过程都有可能伴有质量亏损。例如，由于太阳向宇宙空间辐射能量，每秒钟有四百万吨的质量亏损。温度为 100°C 、 1kg 的开水，当温度降为 0°C 时，会放出热量 $Q = 4.2 \times 10^5 \text{ J}$ ，相当于它的静止能量减少了 $\Delta E = 4.2 \times 10^5 \text{ J}$ ，对应的质量亏损为 $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 4.67 \times 10^{-12} \text{ kg}$ 。

20.5.4 相对论的能量—动量关系式

由上述讨论可知，在相对论中，静止质量为 m_0 的粒子，以速率 v 运动时，其运动时的总能量 E 、动质量 m 、动量 P ，以及静止能量 E_0 的定义如下

$$\begin{cases} E = mc^2 \\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ P = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E_0 = m_0 c^2 \end{cases}$$

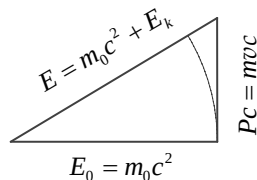


图 20.16 相对论的总能量、动量和静止能量的三角形关系

借助于以上定义式,可以导出相对论中粒子的**能量**

—**动量关系式**, 即

$$E^2 = E_0^2 + P^2 c^2 \quad (20.37)$$

由于上述关系式可以形象地用直角三角形表示出来,如图 20.16 所示,所以亦称**能量—动量的三角关系**。

作为一个粒子物理的典型例子,我们将上述能量—动量三角关系式用于光子,从而得出光子的动质量与动量的表达式。

根据爱因斯坦提出的光子假设(参见第 21 章),光子是静止质量为零的粒子,对于频率为 ν 的光子,其能量为

$$\varepsilon = h\nu \quad (20.38)$$

所以由式(20.37)可得**光子动量**为

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (20.39)$$

上式表明,光子动量的大小与波长成正比,又动量是矢量,动量的方向就是光子的传播方向。再由质能关系式 $\varepsilon = mc^2$, 可得**光子动质量**为

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (20.40)$$

人们将式(20.38)、(20.39)和(20.40)三式合起来称为爱因斯坦的光子方程。光子是电磁场中的粒子,光子的动质量既能产生万有引力,也能受到万有引力的作用。这是光线的传播路径在万有引力的作用下将产生弯曲的原因之一。当然,严格来讲光线在引力场中的弯曲是爱因斯坦在广义相对论中的一个预言,这个预言已被天文观测所证实。

思考题

20.1 在一个给定的参考系中进行力学实验,能否测出这个参考系相对于惯性参考系

的加速度？

20.2 洛伦兹收缩假设是如何圆满解释迈克耳孙-莫雷实验的结果的？

20.3 当 K 系和 K' 系的坐标原点重合时，有一光脉冲从原点的点光源发出。试根据相对论的基本假设，经过一段时间后该光脉冲的波前在这两个惯性系中各是什么形状。

20.4 若两个事件在惯性参照系 S 中发生于同一时刻、不同的地点，他们在任何其他惯性参考系 S' 中是否会同时发生？两个事件的空间间隔是否相同？试加以说明。

20.5 根据相对论，是否一切事物都是相对的？相对论是否允许存在不变的东西？也就是说，是否存在对所有观察者都显得相同的东西？若有的话，请举例。

20.6 在相对论中，对动量的定义 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 和公式 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 的理解，与在牛顿力学中有何不同？在相对论中， $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 是否仍然成立？为什么？

20.7 能否将一个静止质量不为零的物体加速到光速？请解释之。

20.8 是否可以简单地用运动质量 m 来替代经典方程式中的 m_0 以获得相应正确的相对论方程式？请举例说明。

20.9 相对论粒子的动能可否用： $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v^2$ 表示？

20.10 什么叫质量亏损？它和原子能的释放有何关系？

习 题

文档 20.2 第 20 章 狭义相对论习题答案

（本章习题中标“*”号的题目相对较难，老师和学生可按需处理）

20.11 在某惯性系 S 中，两事件发生在同一地点而时间间隔为 4s ，另一惯性系 S' ，以速度 $v = 0.6c$ 相对 S 运动，问在 S' 系中测得的两事件的时间间隔和空间间隔各是多少？

20.12 惯性系 S 中的观察者测得有两个事件同时发生在该系中 x 轴上相距 1000 m 的两点上。而在沿 x 轴方向相对于 S 系运动的另一惯性系 S' 中，测得这两个事件发生的地点相距 2000 m 。试求在 S' 系中测量这两个事件发生的时间间隔。

20.13 惯性系 S 中的观察者记录到发生在 x 轴上的两个事件的空间间隔和时间间隔分别为 600 m 和 $8.0 \times 10^{-7}\text{ s}$ 。为了使 S' 系中的观察者测得这两个事件是同时发生的，试求：

（1） S' 系应以多大的速率相对于 S 系运动；

（2） S' 系中的观察者测得这两个事件的发生的空间间隔。

20.14 地面上某无线电发射台向东西两侧距其距离均为 L_0 的两个接收站 E 与 W 同时发射讯号, 并假定发射台与两个接收站在同一直线上。今有一架宇宙飞船以匀速率 v 沿两接收站的连线由西向东飞行, 试问在飞船参照系上的观察者测得两接收站接收到讯号的时间间隔是多少? 哪个接收站先接收到讯号?

20.15 一发炮弹由地面 A 处发射, 经时间 $4 \times 10^{-6} \text{s}$ 后, 另一枚炮弹又在地面 B 处发射。设 A、B 两处相距 800 m。

(1) 试问在什么样的参考系中观察, 上述两发炮弹将在同一地点发射?

(2) 试找出一个参考系, 在其中测得上述两发炮弹同时发射。

*20.16 某质点在惯性系 S' 的 $O'-x'y'$ 平面内以恒定速度 $u' = 0.25c$ 运动, 它的轨迹与 $O'x'$ 轴成 60° 。假设 S' 系相对于另一个惯性系 S 以 $v = 0.8c$ 的速度沿 Ox 轴运动, 试求质点在 S 系中的运动方程及轨迹方程。

20.17 惯性系 S 中的观察者看到两导弹在一条直线路径上彼此平行地同向飞行, 一枚导弹的速率为 $0.9c$, 另一枚导弹的速度为 $0.7c$ 。试求一枚导弹相对于另一枚导弹的速率。

20.18 如果火箭 A 相对于地球以 $0.6c$ 的速率向 y 轴正方向飞行, 火箭 B 相对于地球以 $0.6c$ 的速率向 x 轴负方向飞行, 试求火箭 A 相对于火箭 B 的速率。

20.19 一光源在 S' 系的坐标原点 O' 发出一束光线。此光线在 $O'-x'y'$ 平面内与 x' 轴的夹角为 θ' , 设 S' 系相对于 S 系以速度 v 沿 x 轴正方向运动。试求在 S 系中测得这条光线的传播方向 (即光线在 $O-xy$ 平面内与 x 的夹角)。

20.20 设有两根互相平行的尺, 在各自静止的参考系中的长度均为 l_0 , 它们以相同的速度 v 相对于某一参考系运动, 但运动方向相反, 且平行于尺子, 求站在一根尺子上测量另一根尺子的长度。

20.21 一艘飞船以 $0.99c$ 的速度平行于地面飞行, 该飞船上的宇航员测得此飞船的长度为 400m。

(1) 地面上的观察者测得飞船的长度是多少?

(2) 为了测量飞船的长度, 地面上需有两位观察者携带着两只同步时钟同时地测量飞船首尾两端的位置坐标。在地面参照系中测得这两位观察者相距多远?

(3) 飞船上的宇航员测得这两位观察者相距多远?

20.22 两惯性系 S 和 S' ，各对应坐标轴相互平行，彼此沿 xx' 方向做匀速直线运动。若有一根长为 1m 的米尺静止在 S' 系中，与 $O'x'$ 轴成 30° 角，而在 S 系中测得该米尺与 Ox 轴成 45° 角。试求

- (1) S' 系相对 S 系的速度；
- (2) 在 S 系中测得的米尺长度。

20.23 在 6000 m 的高空大气层中产生了一个 π 介子，以速度 $0.998c$ 飞向地球，设该 π 介子在其自身静止参照系中的寿命等于其平均寿命 $2 \times 10^{-6}\text{ s}$ 。试分别从下面两个角度，即地球上的观察者和 π 介子静止系中的观察者，来判断该 π 介子能否到达地球。

20.24 从地球上测得地球到最近的恒星半人马座 α 星的距离是 $4.30 \times 10^{16}\text{ m}$ ，设一艘宇宙飞船以速度 $0.999c$ 从地球飞向该星。

- (1) 飞船中的观察者测得地球和该星间距离为多少？
- (2) 按地球上的钟计算，飞船往返一次需多少时间？若以飞船上的时间计算，往返一次的时间又是多少？

20.25 一架飞机的正以 $600\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度相对于地面飞行。当用地球上的时钟测定时，需过多长时间飞机上的时钟才会慢 $2\mu\text{s}$ 。

20.26 在一艘飞船内一个船舱的固有长度为 l_0 ，飞船正以速度 v 相对于地面作匀速直线运动。船舱内有一个小球从尾部运动到头部，宇航员测得小球运动速度为 u 。试求地面参照系中的观察者测得小球运动的时间。

20.27 假设某个粒子的静止质量为 m_0 ，试求

- (1) 将该粒子由静止加速到 $0.1c$ 时，外界对粒子所做的功；
- (2) 将该粒子从速率 $0.89c$ 加速到速率为 $0.99c$ 时，外界对粒子所做的功又是多少？

20.28 已知静质量为 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}$ 的电子由静止出发，经过电势差为 $1.0 \times 10^6\text{ V}$ 的均匀电场而被加速。试求

- (1) 电子被加速后的动能；
- (2) 电子被加速后质量增加的百分比；
- (3) 电子被加速后的速度大小。

20.29 设快速运动的介子的能量约为 $E = 3000\text{ MeV}$ ，而这种介子在静止时的能量为 $E_0 = 100\text{ MeV}$ 。若这种介子的固有寿命是 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6}\text{ s}$ ，试求

(1) 介子的运动速度 (已知真空中光速 $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$)。

(2) 它在真空中能够运动的距离。

20.30 在一种热核反应 ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$ 中, 各粒子的静质量如下:

氘核 (${}^2_1\text{H}$): $m_{\text{D}} = 3.3437 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 氚核 (${}^3_1\text{H}$): $m_{\text{T}} = 5.0049 \times 10^{-27} \text{ kg}$

氦核 (${}^4_2\text{He}$): $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 中子 (${}^1_0\text{n}$): $m_{\text{n}} = 1.6750 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 试求

(1) 这一热核反应释放的能量;

(2) 释能效率, 即所释放的能量占静能的百分比;

(3) 1kg 的这种燃料所释放的能量是 1kg 优质煤燃烧所释放热量 (约 $2.93 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$) 的多少倍?

20.31 两个质点 A 和 B, 静止质量均为 m_0 。质点 A 静止, 质点 B 的动能为 $6m_0c^2$ 。

设 A、B 两质点相撞并结合成为一个复合质点。求复合质点的静止质量。

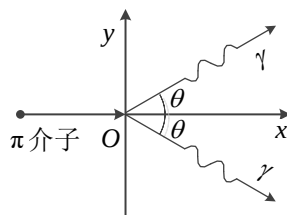
20.32 两个静质量都是 m_0 的粒子, 其中一个静止, 另一个以 $v = 0.8c$ 运动, 在它们作对心碰撞后结合为一个粒子。求碰后合成小球的静质量。

*20.33 静止质量为 M 的粒子处于静止状态, 它蜕变为具有静止质量为 m_1 、 m_2 的两个粒子, 试求蜕变后两粒子速度 v_1 、 v_2 的大小。

*20.34 一中性 π 介子相对于观察者以速度 $v = c/n$ 运动, 后衰变为两个光子。两光子的传播方向与 π 介子的运动方向成相等的角度 θ , 试证明:

(1) 两光子有相等的能量;

(2) $\cos \theta = 1/n$ 。



习题 20.34 图

第 21 章 早期量子论

自从 1888 年，德国物理学家赫兹发现并证明电磁波存在以后，光的电磁理论及其电磁波的本性很快就被人们普遍接受了。正当人们认为光的本质已经被完全了解之时，从 19 世纪末到 20 世纪初，人们在研究光与物质的相互作用过程中，又发现了几个用光的电磁理论无法解释的实验现象，如黑体辐射、光电效应、康普顿效应以及原子的线状光谱等。1900 年普朗克为了克服经典理论解释黑体辐射规律的困难，引入了能量子概念，为量子理论奠下了基石。随后，爱因斯坦针对光电效应实验规律与经典电磁理论的矛盾，提出了光子假说，并在固体比热问题上成功地运用了能量子概念，为量子理论的发展打开了局面。1913 年，玻尔在卢瑟福有核模型的基础上运用量子化概念，对氢原子光谱规律做出了满意的解释，使量子论取得了初步胜利。从 1900 年到 1913 年，可以称为量子论的早期。

本章先介绍黑体辐射和普朗克的能量子概念，然后再介绍光电效应及爱因斯坦光电效应方程，并通过光子概念正确地解释康普顿效应的实验规律，进一步证明光子理论的正确性；最后介绍氢原子的光谱规律及玻尔的氢原子理论。

§21.1 黑体辐射 普朗克能量子假设

21.1.1 热辐射 黑体

1. 热辐射

实验指出，任何一个物体在任何温度下都能从它的表面向外辐射电磁波。对于给定的物体，在一定时间内物体辐射电磁波能量的多少，以及辐射能量按波长的分布规律都与物体的温度有关。这种与温度有关的辐射称为**热辐射**（heat radiation）。例如，物体温度较低时（即在常温下），物体辐射出的电磁波都是不可见的红外线；当温度为大于 500°C 时，有一部分电磁波开始出现在可见光中；当物体的温度升到 3500°C 至 6900°C 时，热辐射中最强的波长成分在可见光区。而且随着温度的升高，物体的表面颜色由暗红、赤红、橙色最后变成青白色；同时物体向周围辐射电磁波能量也愈多。

实验证明，物体在向外辐射电磁波的同时，也在吸收辐射到它表面上的电磁波，且辐射本领越大的物体，其吸收本领也越大。一般说来，入射到物体上的电磁辐射，只有一部分被物体吸收，另一部分则被物体反射和透射。当物体向外辐射的能量等于在同一时间内所吸收的能量，即辐射和吸收达到平衡时，物体的温度不再变化，此时物体的热辐射称为平衡热辐射。

为了定量研究物体热辐射的规律，需要引入单色辐射出射度（简称：**单色辐出度**）和辐射出射度（简称：**辐出度**）的概念。

单色辐出度（monochromatic radiant exitance）是指温度为 T 的物体在单位时间内、从物体单位表面积上辐射出的波长在 λ 附近单位波长间隔内的电磁能量，用 $e(\lambda, T)$ 表示，即

$$e(\lambda, T) = \frac{dE(\lambda, T)}{d\lambda} \quad (21.1)$$

式中， $dE(\lambda, T) = e(\lambda, T)d\lambda$ 是温度为 T 的物体在单位时间内、从单位表面积上辐射出的波长在 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ 波长区间内的电磁能量。单色辐出度 $e(\lambda, T)$ 的单位为： W/m^2 。一般来说， $e(\lambda, T)$ 是辐射体的热力学温度 T 和辐射波长 λ 的函数，且与物体的材料及表面情况有关。

辐出度（radiant exitance）是指温度为 T 的辐射体，在单位时间内、物体单位表面积上辐射出的各种波长电磁波的总能量，用 $E(T)$ 表示，它与单色辐出度的关系为

$$E(T) = \int_0^\infty e(\lambda, T)d\lambda \quad (21.2)$$

辐出度的单位为： W/m^2 。

2. 黑体

一般来说，照射到物体上的辐射能，只有一部分被物体吸收，另一部分被物体表面反射，如果物体是透明的，则还有一部分透射。在温度为 T 时，物体表面被吸收、反射或透射的波长在 $\lambda + d\lambda$ 区间的辐射能量，与入射到的该表面的、相同波长范围的电磁波能量之比，分别称为物体的单色吸收系数、单色反射系数和单色透射系数，并分别用 $\alpha(\lambda, T)$ 、 $r(\lambda, T)$ 和 $w(\lambda, T)$ 表示。根据能量守恒定律，有

$$\alpha(\lambda, T) + r(\lambda, T) + w(\lambda, T) = 1$$

对于不透明的物体，有

$$\alpha(\lambda, T) + r(\lambda, T) = 1$$

如果物体在任何温度下，都能完全吸收照射到它表面的、所有波长的电磁辐射，这样的物体称为**绝对黑体**，简称**黑体**（black body）。显然，对于黑体，其单色吸收系数有

$$\alpha_B(\lambda, T) = 1$$

1860年，德国物理学家G. R. 基尔霍夫发现，任何物体在温度为 T 的平衡态下，其单色辐出度 $e(\lambda, T)$ 与其单色吸收系数 $\alpha(\lambda, T)$ 的比值只是辐射波长和温度的函数，而与辐射体本身的性质无关，即

$$\frac{e(\lambda, T)}{\alpha(\lambda, T)} = \frac{e_B(\lambda, T)}{\alpha_B(\lambda, T)} = e_B(\lambda, T) \quad (21.3)$$

式中的 $e_B(\lambda, T)$ 是同温度下黑体的单色辐出度。

上述规律称为基尔霍夫辐射定律。该定律表明，辐射能力强的物体其吸收能力也强，反之亦然。相同温度的各种辐射体，黑体的吸收能力最大，所以其辐射本领也最强。

一般来说，物体辐射电磁能量的多少及电磁能量按波长的分布，即热辐射的规律，不仅与物体的温度有关，还与组成该物体的材质及表面状况有关。但对于黑体而言，温度相同时热辐射的规律是完全相同的，与组成黑体的材质及表面状况无关。因此，研究黑体辐射的规律就具有重要的理论意义和实用价值。

绝对黑体在自然条件下并不存在。例如，最黑的煤烟对太阳光的吸收系数也不超过 99%。所以黑体就象质点、刚体等模型一样，也是物理学中的一个理想化的模型。但是，人们可以利用黑体的特征，人工制作出理想黑体的模型。如图 21.1 所示，用不透明的材料制成一个封闭空腔，空腔壁上开一个小孔，则任何波长的电磁辐射穿过小孔进入空腔后，将在空腔内壁反复反射，每反射一次，电磁波的能量就会被吸收一部分，因此经多次反射后其能量几乎全部被腔壁吸收，最后能够从小孔反射出去的能量微乎其微。于是，对空腔外的观察者而言，小孔对任何波长电磁辐射的吸收系数都趋近于 1，故小孔表面可看作是黑体。

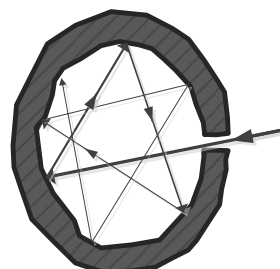


图21.1 黑体模型

在日常生活中，也有近似的黑体。例如，白天远望建筑物上的窗口时，会发现窗口很黑，而且窗口越小，看起来越黑。这是因为从窗口进入的光线经室内的物体多次反射、吸收后，很少能再从窗口射出的缘故。所以窗口表面就近似于一个黑体。钢铁厂金属冶炼炉上开的观察炉温的小孔，也可近似为一个黑体。

21.1.2 黑体辐射的实验规律

有了黑体模型，利用如图 21.2 所示的分光装置就能从实验上研究黑体辐射的规律。

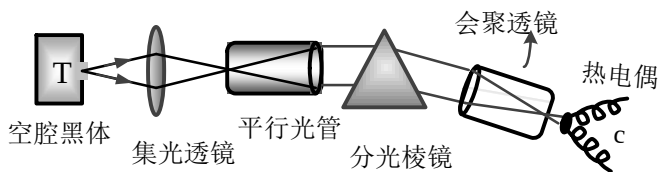


图21.2 黑体辐射测量系统示意图

如图 21.2 所示，温度为 T 的空腔，腔体上的小孔就相当于一个温度为 T 的黑体，其发出的辐射经分光系统将不同波长的辐射按一定的角度关系分开，转动探测系统就可以测量不同波长辐射的强度分布，进而得出该温度 T 下黑体的单色辐出度 $e_B(\lambda, T)$ 按波长的分布规律。加热空腔到不同的温度，就可以测得黑体单色辐出度 $e_B(\lambda, T)$ 与波长 λ 在不同温度下的关系曲线，如图 21.3 所示。

根据实验结果，人们总结出如下两条关于黑体辐射的实验定律。

1. 斯特藩—玻尔兹曼定律 (Stefan-Boltzmann law)

1879 年，奥地利物理学家斯特藩从实验中发现了黑体的单色辐出度随波长分布的

实验曲线，并测得实验曲线下的面积，即黑体的辐出度 $E_B(T)$ 与黑体的热力学温度 T 的四次方成正比，即

$$E_B(T) = \int_0^{\infty} e_B(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad (21.4)$$

随后，玻尔兹曼于 1884 年从热力学理论上也导出了上述结果。所以这一结果称为斯特藩—玻尔兹曼定律，式中的 σ 称为斯特藩—玻耳兹曼常量，实验测得其值为

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

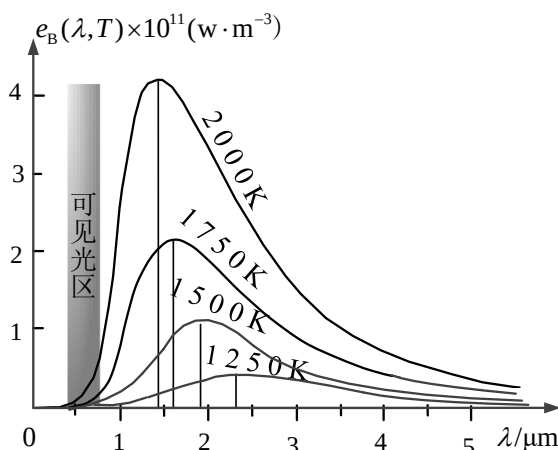


图21.3 黑体辐出度随波长分布曲线

2. 维恩位移定律 (Wien displacement law)

从图 21.3 还可以看出，在任一温度下，黑体的单色辐出度 $e_B(\lambda, T)$ 均有一最大值，与这一最大值对应的波长 λ_m 称为峰值波长，而且随着温度 T 的升高，峰值波长 λ_m 向短波方向移动。实验测得两者的关系为

$$\lambda_m T = b \quad (21.5)$$

1893 年，维恩从热力学理论上也导出了这个结果。所以这一结果称为维恩位移定律，式中 b 称为维恩位移常量，实验测得其值为

$$b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

热辐射的规律在现代科学技术中的应用很广泛。它是高温测量、遥感、红外追踪等技术的物理基础。例如，根据维恩位移定律，如果实验测出黑体单色辐出度对应的峰值波长，就可以计算出这一黑体的温度。太阳的表面温度就是这样测得的。若将太阳看作黑体，从太阳光谱测得 λ_m 近似为 490nm，由维恩位移定律可以算得太阳表面的温度约为 5900k。

例 21.1 太阳的单色辐出度的峰值波长 $\lambda_m = 483\text{nm}$ ，试由此估算太阳表面的温度和辐出度。

解 由维恩位移定律，太阳表面的温度 T 为

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{490 \times 10^{-9}} (\text{K}) = 5.91 \times 10^3 \text{ K}$$

由斯特藩-玻耳兹曼定律，太阳表面的辐出度为

$$\begin{aligned} E_B(T) &= \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (5.91 \times 10^3)^4 (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \\ &= 6.92 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

21.1.3 普朗克的能量量子假设

为了从理论上导出黑体的单色辐出度 $e_B(\lambda, T)$ 与波长 λ 在不同温度下的关系曲线，并找出和图 21.3 相符合的数学表达式 $e_B(\lambda, T) = f(\lambda, T)$ ，19 世纪末许多物理学家从经典物理理论出发做了大量工作，但是他们都遭到了失败，理论公式和实验结果不相符合。其中最为典型的黑体辐射经典公式是维恩公式和瑞利—金斯公式。

根据经典电磁理论，热辐射是物体中大量带电粒子作无规则的热运动引起的。黑体空腔壁的每个分子，原子或离子都在各自的平衡位置附近作微小振动，所以可将它们看作带电的线性谐振子。它们向周围空间辐射与各自振动频率相同的电磁波，形成连续的电磁辐射谱。

1896 年维恩利用热力学和速率分布理论，用辐射能按波长的分布类似于麦克斯韦分子速率分布的思想导出了一个 $e_B(\lambda, T)$ 的理论公式，即

$$e_0(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{\frac{-c_2}{\lambda T}} \quad (21.6)$$

其中 c_1 和 c_2 是两个常量，上式称为维恩公式。这个公式的曲线如图 21.4 中的虚线所示，该曲线和实验结果（图中实验值用 $\circ$ 表示）在短波方向吻合得很好，而在长波方向和实验结果相差较大。

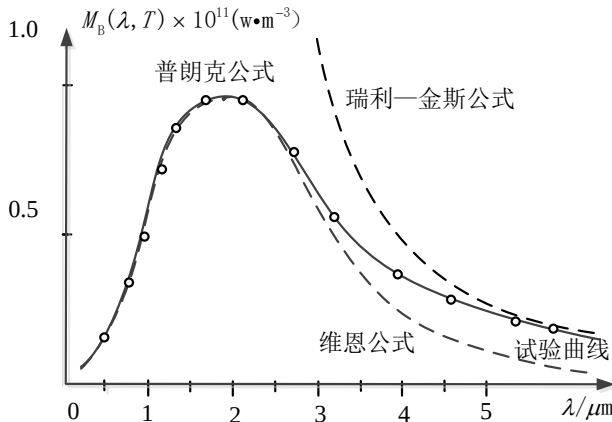


图21.4 黑体辐射理论与实验结果的比较曲线

1900 年，瑞利把经典统计物理学中能量按自由度均分定理应用到电磁辐射上来，导出了一个黑体辐射公式。1905 年，金斯修改了瑞利公式中的一个数值错误，得到了如下结果

$$e_B(\lambda, T) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \quad (21.7)$$

式中 c 为常量，上式称为瑞利—金斯公式。如图 21.3 中的虚线所示。这个公式对应的理论曲线在长波段与实验结果比较吻合，但在短波段和实验结果相差很大，特别是当波长向短波（紫外）方向不断变短时， $e_B(\lambda, T)$ 甚至趋于无穷大。这一荒唐的结果，物理学史上称之为“**紫外灾难**”。

黑体辐射问题所处的困境成为十九世纪末“物理学晴朗天空中一朵令人不安的乌云”，但它却孕育着一个新物理概念的诞生。

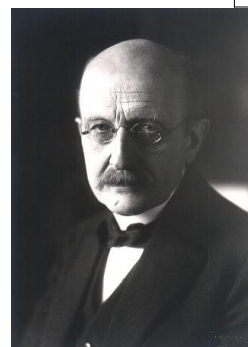
按照经典理论，谐振子辐射出的电磁波能量与谐振子振幅的平方成正比。而由于谐振子的振幅可以连续变化，所以谐振子辐射出的电磁波能量也可以连续变化。但经典理论解释不了黑体辐射的实验结果，说明经典理论存在着某种缺陷。德国物理学家普朗克认为经典理论之所以出现偏离，主要在于它不适用于分子、原子的微观运动。

文档21.1
普朗克

为了得到与实验曲线相一致的黑体辐射公式，1900年10月17日，普朗克公布了通过在维恩公式和瑞利—金斯公式之间用内插法得到的一个黑体辐射公式，即

$$e_B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (21.8)$$

式中 c 是光速， k 是玻尔兹曼常量， h 是一个新引入的常量，称为普朗克常量。由于该公式从短波到长波的整个波长范围内与实验曲线完全吻合，所以该公式能准确地反映黑体辐射的实验规律，人们将它称为普朗克公式。随后不久，在1900年12月14日德国物理学会的例会上，普朗克作了《论正常光谱中的能量分布》的报告。在这个报告中，他提出了著名的**能量子**（energy quantum）假设。他说，为了从理论上得出正确的黑体辐射公式，必须假定：**空腔壁上分子或原子的振动可视为一维谐振子；它吸收或者发射电磁辐射能量时，不能连续地吸收或发射能量，而是以与谐振子的频率成正比的能量子**



普朗克

为基本单元来吸收或发射能量；这就是说空腔壁上的谐振子吸收或发射的能量只能是 $h\nu$ 的整数倍，即

$$\varepsilon = h\nu \quad (21.9)$$

为基本单元来吸收或发射能量；这就是说空腔壁上的谐振子吸收或发射的能量只能是 $h\nu$ 的整数倍，即

$$E = n h \nu \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21.10)$$

式中： n 称为量子数、 h 称为普朗克常量，其值为

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

这种能量不连续的情况称为**能量量子化**。

普朗克从他的能量子假设出发，利用统计物理学理论成功地重新导出了黑体辐射公式（21.8）。图 21.4 中的实线即普朗克公式的理论曲线，它与黑体辐射实验结果在全波段范围内都符合得很好。

由普朗克公式还可以推导出维恩位移定律，斯特藩-波耳兹曼定律，这表明普朗克能量子假设和普朗克公式可以从理论上说明黑体辐射的能量按波长分布的规律。

普朗克的能量子假设是对经典物理的重大突破，不仅成功解释了黑体辐射的实验规律，而且打开了人们认识微观世界的大门，为量子力学的诞生奠定了基础，1900 年 12 月 14 日，被称为量子论的诞辰日。普朗克由于提出能量子假说，对建立量子理论作出了卓越贡献，于 1918 年荣获诺贝尔物理学奖。

§21.2 光电效应 爱因斯坦的光子理论

21.2.1 光电效应及其实验规律

当可见光或紫外线照射到金属表面时，有电子从金属表面逸出的现象称为**光电效应**（photoelectric effect）。光电效应是由德国物理学家赫兹首先发现的。1887 年，赫兹在做验证麦克斯韦电磁理论的火花放电实验时意外发现，如果接收电磁波的电极受到紫外线的照射，火花放电就变得容易产生。

1888 年，德国物理学家霍尔瓦克斯证实，火花放电变得容易产生是由于在放电间隙内出现了带电粒子的缘故。若干年后，人们发现这种带电粒子就是电子（电子在 1897 年被 J.J.汤姆孙发现）。从而证实赫兹所观察到现象的实质是由于在光的照射下金属表面发射出电子的结果。

1899—1902 年，勒纳德（P.Lenard）对光电效应进行了系统的研究，总结出了光电效应的一些实验规律。

图 21.5 是光电效应的实验装置示意图，在抽成真空的光电管内装有金属阴极 K 和阳极 A，当可见光或紫外线通过石英窗口照射到 K 的表面时，就有电子从表面逸出，这种电子称为**光电子**（photo electron）。当有电子到达阳极 A 时，回路中就有电流，称为**光电流**。实验发现，**光电效应的实验规律如下：**

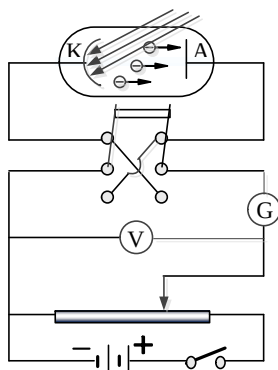


图21.5 光电效应实验装置示意图

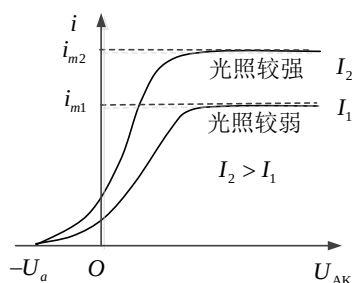


图21.6 光电流和电压的关系曲线

（1）饱和光电流的大小与入射光的强度成正比。当入射光频率和强度一定时，光电流 i 和光电管两端的加速电压 U_{AK} 的关系如图 21.6 所示。它表明光电流的大小随加速电压的增加而增大，当加速电压增加到一定值时，光电流达到饱和。当入射光频率一定时，

饱和光电流 i_m 与入射光的强度 I 成正比。

(2) 光电子的最大初动能与入射光的频率成正比。由图 21.6 可知，当加速电压 U_{AK} 减小到零时，光电流 i 不等于零。只有加上一定的反向电势差 $-U_a$ ，才能使光电流为零。人们将光电流恰好为零时，所加的反向电势差的大小 U_a 称为**截止电压**或**遏止电势差** (cutoff potential difference)。遏止电势差的存在，说明逸出的光电子有最大初动能 $E_{k,max}$ ，且

$$E_{k,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_a \quad (21.11)$$

实验表明，对于给定的金属材料，光电子的最大初动能 $E_{k,max}$ 或截止电压 U_a 的大小只与入射光频率成线性关系，与光强无关，如图 21.7 所示。其数学表达式为

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = eU_a = eK\nu - eU_0 \quad (21.12)$$

(3) **存在截止频率（或红限频率）** (cutoff frequency)。对于给定的金属材料，入射光的频率必须大于或等于某一频率 ν_0 ，才可以产生光电效应。频率 ν_0 称为光电效应的截止频率或红限频率。实验表明，只要入射光的频率高于红限频率，即使光强很弱也能产生光电效应；而当入射光的频率低于红限频率时，无论多强的光都无法使电子从金属表面逸出。此外，红限频率与入射光强无关，只与金属材料有关，每种金属都有自己特定的红限频率。表 21.1 给出了几种金属的红限频率。

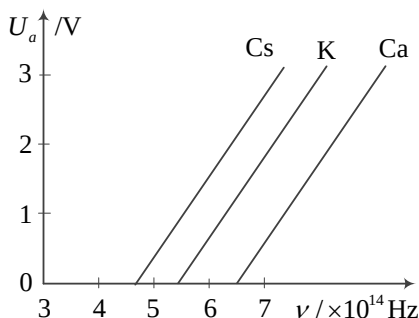


图21.7 截止电压与入射光频率的关系图

(4) **光电效应具有瞬时性**。若入射光的频率大于红限频率，即使光强很弱，入射光一开始照射，立刻就能产生光电效应，实际延迟时间不超过 10^{-9} 秒。

经典电磁理论在解释上述光电效应的实验规律时遇到了极大的困难，实验规律中的第 2、3、4 点用经典电磁理论完全无法解释。在光电效应中，光电子要从金属表面逸出需要克服阻力而做功，其最小值称为逸出功。几种金属的逸出功见表 21.1。根据经典电磁理论，光是电磁波，电磁波的能量决定于它的强度，与电磁波的频率无关。电子从具有一定强度的光波中吸收能量而逸出，其初动能应与光强有关而与频率无关，因此不应该存在红限频率。不论什么频率，只要光足够强，总可以连续供给电子足够的能量而使其逸出，而且光强越大，逸出光电子的初动能也越大。此外，根据经典理论，光强越弱，电子从连续光波中吸收并累积到逸出所需能量的时间越长，对很弱的光要想使电子获得

足够的能量逸出，必须有一个能量积累的过程而不可能瞬时产生光电子。所以光的经典电磁理论对光电效应的实验规律无法解释。

表 21.1 几种金属的逸出功和红限频率

金 属	逸出功/eV	红限频率 $\nu_0 / 10^{14} \text{ Hz}$
铯 Cs	1.94	4.69
钾 K	2.25	5.43
钙 Ca	3.20	6.55
锌 Zn	3.34	8.06
铝 Al	4.08	9.03
铜 Cu	4.70	10.80

21.2.2 爱因斯坦的光子理论和光电效应方程

1905 年，爱因斯坦为了解释光电效应的实验规律，在普朗克能量量子假说的基础上大胆地提出了光子理论。他认为，普朗克的理论只考虑了辐射体上谐振子的能量量子化，即谐振子发射或吸收的能量是量子化的。他进一步认为空腔中辐射场的能量本身也是量子化的，也就是说**光在空间传播时具有粒子性**，光的能量并不像波动理论所想象的那样在分散在空间，而是集中在一些叫做**光子**（简称：光子）（photon）的粒子上，一束光就是一群以光速 c 运动着的光子流。一个频率为 ν 的光子的能量为

$$\varepsilon = h\nu \quad (21.13)$$

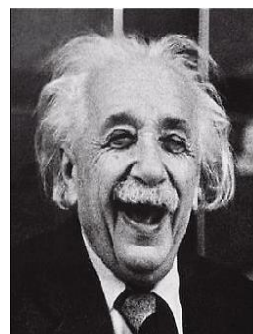
只与光的频率有关，而与光的强度无关。光的强度（即平均能流密度）为 $I = \bar{S} = nh\nu$ ，式中 n 是单位时间内、通过与光的传播方向垂直的单位横截面的光子数。

根据爱因斯坦的光量子理论，射向金属表面的光，实质上就是具有能量 $\varepsilon = h\nu$ 的光子流。如果照射光的频率过低，则光子流中每个光子能量较小，当它照射到金属表面时，电子吸收了这个光子的能量后，它所拥有的能量仍然可能小于电子脱离金属表面所需要的逸出功，电子就不能逸出金属表面，因而不能产生光电效应。如果照射光的频率较高，则每个光子的能量就较大，电子吸收光子的能量后，就能够克服金属表面的逸出功逸出金属表面，产生光电效应。根据能量守恒定律，逸出电子的初动能、入射光子的能量和逸出功之间的关系可以表示成

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = h\nu - A \quad (21.14)$$

式中 A 就是金属的逸出功， ν 是入射子的频率， h 是普朗克常数。式（21.14）就是著名的**爱因斯坦光电效应方程**。

爱因斯坦的光子理论及其光电效应方程可以成功地解释光电效应的实验规律：



爱因斯坦

(1) 根据光子理论, 频率 ν 一定时, 光强越大, 则单位时间到达金属表面的光子数就越多, 产生光电效应时单位时间被激发而逸出的光电子数也就越多, 故饱和光电流与光强成正比。

(2) 光电效应方程表明光电子的最大初动能和入射光的频率之间成线性关系, 与光强无关。

(3) 对于给定的金属材料, 存在发射光电子所需的最小频率即红限频率 ν_0 , 其值满足 $h\nu_0 = A$ 。当入射光频率 $\nu < \nu_0$ 时, 电子不能逸出, 不产生光电效应。所以红限频率及红限波长分别为

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A} \quad (21.15)$$

它们只决定于金属的逸出功。

(4) 光子与电子发生作用时, 电子一次性地吸收一个光子能量 $\varepsilon = h\nu$, 不需要时间积累, 故光电效应是瞬时效应。

1921 年, 爱因斯坦因建立光量子理论并成功地解释了光电效应的实验规律而获得诺贝尔物理学奖。

根据光电效应原理制成的光电管和光电倍增管等器件, 由于能方便地将光信号转变为电信号, 因而在科学研究和国防工业等许多领域获得了广泛的应用。如军事上广泛使用的微光夜视仪, 星光瞄准具等就是应用光电倍增管在夜间将目标物发射的微弱光信号放大后实现对目标的观察和检测。

例 21.2 已知从金属铝表面移出一个电子需要 4.20eV 的能量, 今用 $\lambda = 200\text{nm}$ 的光照射其表面, 试求:

- (1) 光电子的最大初动能;
- (2) 遏止电势差;
- (3) 铝的红限波长。

解 (1) 根据爱因斯坦的光电效应方程, 有

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A = 3.21 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(2) 遏止电势差为

$$U_a = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{e} = 2.02 \text{ eV}$$

(3) 由 $\nu_0 = \frac{A}{h}$ 得, 铝的红限波长为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A} = 296 \text{ nm}$$

21.2.3 光的波粒二象性

1916 年，爱因斯坦又首次提出，光子不仅具有能量，而且还具有动量、质量等一般粒子共有的特性。

由于光子的运动速度恒为 c ，所以光子的静止质量为零。由相对论质能关系式，可得：波长为 λ 、频率为 ν 的光子的能量、质量和动量分别为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= h\nu \\ m &= \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \\ p &= mc = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (21.16)$$

人们将式 (21.16) 中的三个方程统称为爱因斯坦光子方程或爱因斯坦关系式。

由于光子具有动量，当光照射在物体上时，将对物体的反射面或吸收面施以压力，即光压。这已经在列别捷夫的光压实验中得到证实。

光子假说不仅成功地解释了光电效应，康普顿效应（见下一节）等实验，而且深化了人们对光的本性的认识。光不仅具有干涉，衍射和偏振等波动特性，而且还具有粒子性。光所具有的这种波动和粒子的双重特性称为光的**波粒二象性**（wave-particle dualism of light）。描述光的波动性的物理量：波长 λ 和频率 ν 与描述光的粒子性的物理量：能量 ε 和动量 p 通过爱因斯坦光子方程联系了起来。

§ 21.3 康普顿效应

21.3.1 康普顿效应及其实验规律

微视频21.1
康普顿效应

1923 年康普顿研究了 X 射线被物质（如石墨、石蜡等）散射的实验，发现散射波中除了有与原入射波长相同的波长成分外，还有入射波中没有的波长变长的成分。这种波长变长的散射现象称为**康普顿散射**（Compton scattering）或**康普顿效应**（Compton effect）。康普顿的学生，我国物理学家吴有训进一步测试了不同散射物质对 X 射线的散射，证实了康普顿效应的普遍性。康普顿因发现康普顿效应而获得了 1927 年诺贝尔物理学奖。

图 21.8 是康普顿散射实验装置示意图。X 射线源发出的波长为 λ_0 的 X 射线束投射到散射体上，经散射体散射后，不同散射方向上的 X 射线的波长及相对强度由晶体和探测器组成的检测系统测定。

康普顿散射的实验规律可概括如下：

（1）散射线中除了有与原入射波长相同的波长成分外，还有入射波中没有的波长变长的成分。

(2) 波长的偏移量 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 随散射角 θ 的增大而增加, 与散射物质无关, 如图 21.9 所示。

(3) 对于各种不同的散射物质, 在同一散射角 θ 处, 波长偏移量 $\Delta\lambda$ 相等。但是随着散射物原子序数的增加, 散射线中波长为 λ_0 的谱线强度逐渐增强, 新出现的波长变长的谱线 λ 的强度逐渐减弱, 如图 21.10 所示。

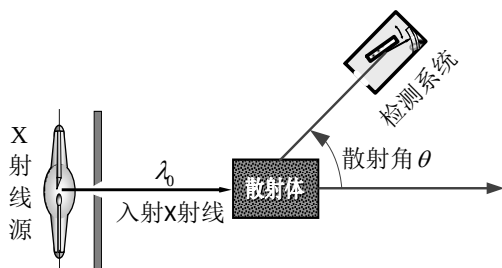


图21.8 康普顿散射示意图



康普顿

文档21.2
康普顿

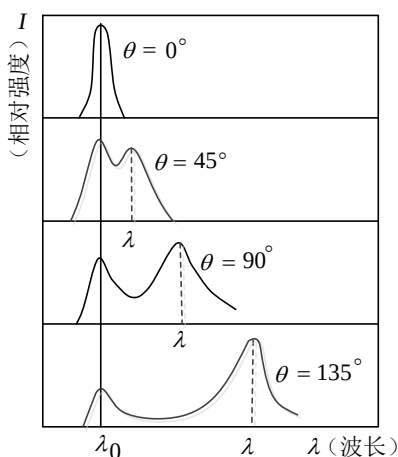


图21.9 康普顿散射与散射角的关系

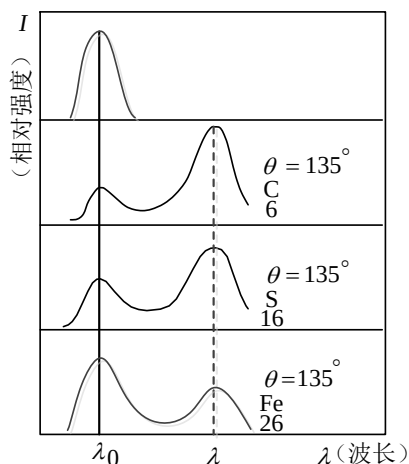


图21.10 康普顿散射与原子序数的关系

21.3.2 康普顿效应的理论解释

按照经典电磁理论, 当电磁波通过散射物质时, 物质中的带电粒子受到入射电磁波中交变电场的作用而作受迫振动, 从入射波中吸收能量, 同时又作为新的波源向四周辐射电磁波。此外, 电磁理论还指出: 带电粒子作受迫振动的频率应等于入射电磁波的频率, 其辐射电磁波的频率应和它的振动频率一致, 因此散射波的频率 (或波长) 与入射波的频率 (或波长) 相同。可见, 光的电磁理论可以解释频率 (或波长) 不变的散射现象, 但不能解释波长变长的康普顿散射。

康普顿利用爱因斯坦建立的光量子理论成功地解释了康普顿效应。按照光量子理论,

电磁辐射是光子流。由于光子和电子、质子那样的实物粒子一样，不仅具有能量，还具有动量，所以他认为康普顿散射是 X 射线中的光子与散射物质中弱束缚的电子发生完全弹性碰撞的结果，碰撞过程中光子和电子系统能量守恒，动量也守恒。在碰撞过程中光子的一部分能量转移给了电子，因而它的能量减少了，频率降低了，波长变长了。

通过光子方程 $\varepsilon = h\nu$ 计算可知，X 射线中光子的能量很大，约为 $10^4 \sim 10^5$ eV，而散射物质中弱束缚电子的电离能只有几个 eV，因而可以忽略这些电子的束缚能，将它们近似地看成是自由电子。又由于这些电子的速度远小于光子的速度，所以被光子碰撞之前可以近似地看成是静止的。于是，入射 X 射线中光子与散射物质中弱束缚电子之间的相互作用，可以看成是光子和静止的自由电子之间的完全弹性碰撞。

如图 21.11 所示，频率为 ν_0 的入射电磁波沿 x 轴传播，一个具有能量 $h\nu_0$ 和动量 $\frac{h\nu_0}{c}\mathbf{e}_0$ 的光子与静止的自由电子碰撞后被散射，散射光子与入射光子的运动方向成 θ 角，其能量变为 $h\nu$ 、动量变为 $\frac{h\nu}{c}\mathbf{e}$ ，与此同时，初始能量为 m_0c^2 ，动量为零的电子在碰撞后沿角度为 φ 的方向飞出。这时电子的能量变为 mc^2 、动量变为 $m\mathbf{v}$ 。根据弹性碰撞过程中系统的总能量守恒和总动量守恒，有：

$$\begin{aligned} h\nu_0 + m_0c^2 &= h\nu + mc^2 \\ \frac{h\nu_0}{c}\mathbf{e}_0 &= \frac{h\nu}{c}\mathbf{e} + m\mathbf{v} \end{aligned}$$

式中 m_0 为电子的静止质量， $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 为反冲电子的质量， $\mathbf{e}_0$ 和 $\mathbf{e}$ 是光子被散射前后运动方向上的单位矢量。

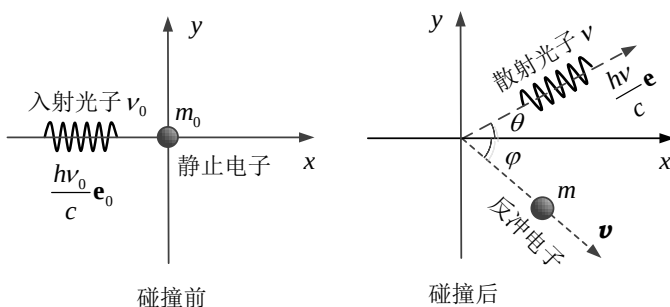


图21.11 光子与电子的碰撞示意图

动量守恒关系的分量式为

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_0}{c} &= \frac{h\nu}{c} \cos \theta + mv \cos \varphi \\ \frac{h\nu}{c} \sin \theta &= mv \sin \varphi \end{aligned}$$

联立求解以上方程式可得康普顿效应的波长偏移公式为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (21.17a)$$

或

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (21.17b)$$

式中 $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ，称为**康普顿波长**（Compton wavelength）。

上式表明，波长的改变量 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ 与散射物质以及入射波长无关，只与散射角 θ 有关，且随散射角 θ 的增大而增加。计算结果和实验结果符合的很好。

至于散射波中仍然有与原入射波长相同的波长成分，可以看作是光子和原子的内层电子碰撞的结果。由于内层电子被原子紧紧的束缚着，光子和这种电子的碰撞，相当于和整个原子发生碰撞。由于光子的质量远小于原子的静止质量，所以这样的碰撞类似于乒乓球与大铁球之间的碰撞，碰撞中光子的能量几乎不变，这样散射光中就保留了原入射波长的谱线。随着散射物原子序数的增加，散射物中自由电子占总电子数的比例在减小，导致光子与自由电子碰撞的概率在减小，与整个原子碰撞的概率在增加，所以散射波中与原入射波长相同的谱线强度随之增强，而波长变长部分的谱线强度随之减弱。

康普顿效应的发现，以及理论分析和实验结果的一致，不仅有力地证实了爱因斯坦提出的光子假说的正确性，还证实了在光子与微观粒子的相互作用过程中，也严格遵守能量守恒定律和动量守恒定律。

例 21.3 在康普顿散射实验中，入射光子的波长为 $3.00 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ，在 $\theta = 90^\circ$ 的方向上观察散射光。试求：

- (1) 散射光子的波长；
- (2) 反冲电子的动能；
- (3) 反冲电子的动量大小及其运动方向（即与入射 X 射线方向之间的夹角 φ ）。

解：（1）由康普顿效应的波长偏移公式

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

可得，散射光子的波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \\ &= 3.00 \times 10^{-12} + 2.43 \times 10^{-12} (1 - \cos 90^\circ) (\text{m}) = 5.43 \times 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

（2）根据能量守恒，可得反冲电子的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda_0} - h \frac{c}{\lambda} \\ &= 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{3 \times 10^{-12}} - \frac{1}{5.43 \times 10^{-12}} \right) (\text{J}) \end{aligned}$$

$$= 2.98 \times 10^{-14} \text{ J} = 1.85 \times 10^5 \text{ eV}$$

(3) 再由动量守恒 (如图 21.12 所示), 可得, 反冲电子的动量大小为:

$$p_e = \sqrt{p_\lambda^2 + p_{\lambda_0}^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2}$$

$$= 9.62 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

反冲电子的运动方向与入射 X 射线方向之间的夹角为

$$\varphi = \arctan \frac{p_\lambda}{p_{\lambda_0}} = \arctan \frac{h/\lambda}{h/\lambda_0} = \arctan \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$= \arctan \frac{3.00}{5.43} = 28.9^\circ$$

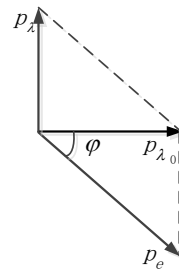


图21.12 动量守恒关系图

§21.4 氢原子光谱 玻尔的氢原子理论

21.4.1 氢原子光谱的规律性

1897 年汤姆逊 (J. J. Thomson) 发现电子, 并确认电子是原子的组成部分。随后, 物理学的中心任务之一就是探索原子内部结构。

原子发光是重要的原子现象之一。19 世纪末 20 世纪初, 人们积累了大量的有关原子光谱的实验数据, 并从中发现, 每一种原子的辐射都具有自己特定频率的光谱, 称为特征光谱, 因此在光谱中包含了有关原子的重要信息。通过研究光谱, 就可以研究原子的内部结构, 并通过原子光谱的实验数据来检验原子理论的正确性。相对于其它原子的光谱, 氢原子光谱最为简单, 自然就成了当时人们研究的重点对象。

很早, 人们就发现了氢原子光谱在可见光部分的四条谱线: H_α 、 H_β 、 H_γ 、 H_δ , 并精确测定了它们的波长, 见图 21.13 中所示。

1885 年, 瑞士数学家巴耳末发现上述 4 条氢原子光谱线的波长可以用一个非常简单的公式给出, 即

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \text{ nm} \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (21.18)$$

式中 $B = 364.56 \text{ nm}$ 为正的常数, 当 $n = 3, 4, 5, 6$ 时, 分别给出了上述四条谱线 H_α 、 H_β 、 H_γ 、 H_δ 的波长。式 (21.18) 称为巴尔末公式。由巴尔末公式计算出的波长构成了一个谱线系列, 该谱线系列称为巴耳末系。

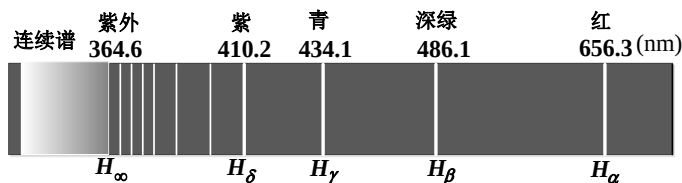


图 21.13 氢原子光谱中巴耳末系的谱线

1889 年，瑞典物理学家里德伯（J. R. Rydberg）引入了波数（即波长的倒数）概念， $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ ，并将巴尔末公式改写成光谱学中常见的形式，即

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (21.19)$$

式中 $R = 1.096\,776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ，称为里德伯常数。在此基础上，他进一步提出了氢原子光谱的普遍表达式

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \begin{cases} m=1, 2, 3, \dots \\ n=m+1, m+2, \dots \end{cases} \quad (21.20)$$

上式称为氢原子光谱的里德伯公式。这一经验公式成功地预言并找到了氢原子的其它光谱线系。例如：1908 年帕邢（F. Paschen）在近红外区发现了对应于 $m = 3$ 的光谱线系，称为帕邢系；1916 年，莱曼（T. Lyman）在紫外区发现了对应于 $m = 1$ 的光谱线系，称为莱曼系；1921 年和 1924 年，布喇开（F. Brackett）、普丰德（H.A. Pfund）在中红外区分别发现了对应于 $m = 4$ 和 $m = 5$ 的光谱线系，分别称为布喇开系和普丰德系。

赖曼系	$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$	紫外光
巴耳末系	$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$	可见光
帕邢系	$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$	红外光
布喇开系	$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$	红外光
普丰德系	$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$	红外光

在氢原子光谱实验规律的基础上，里德伯和里兹等人又于 1908 年发现所有碱金属原子的光谱线和类氢离子的光谱线也有类似的规律性。即原子的光谱都可分成若干个线系，其波数均可以表示为两项之差

$$\tilde{\nu} = T(m) - T(n) \quad (21.21)$$

上式称为里兹组合原理。 $T(m)$ ， $T(n)$ 称为光谱项，其形式为

$$T(m) = \frac{R}{(m + \alpha)^2}, \quad T(n) = \frac{R}{(n + \beta)^2} \quad (21.22)$$

式中 α ， β 为改正数，由具体的元素和光谱线系确定。

归纳起来，原子光谱的普遍规律可概括为如下三点：

(1) 原子光谱是分立的线状光谱;

(2) 各条谱线之间有一定的关系, 即: 同一谱线系中各条谱线的波数可以用同一个公式表达出来, 不同谱线系中谱线的波数可以有共同的光谱项。

(3) 每一条谱线的波数都可表示为二个光谱项之差。

原子光谱可用上述简单的公式来表示, 且其结果又非常准确, 这说明它深刻地反映了原子内在的规律。

21.4.2 α 粒子的散射实验与原子的有核模型

关于原子内部的结构, 人们曾提出了各种不同的模型。

1903 年, 汤姆逊 (J.J.Thomson) 提出了一个原子模型, 他认为原子中的正电荷和原子质量均匀地分布在半径为 10^{-10}m 的球体内, 而带负电的电子则镶嵌在这个球体内, 并在它们的平衡位置附近作简谐振动, 同时辐射电磁波, 人们观察到的原子所发出的光谱的各种频率就等于这些电子的振动频率。人们形象地把这个模型称为葡萄干面包模型, 如图 21.14 所示。汤姆逊的原子模型能够解释当时的一些实验结果, 也能够从理论上说明原子的发光, 散射等问题, 但被以后的一些实验, 尤其是他的学生卢瑟福的 α 粒子散射实验所否定。

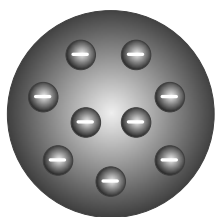


图 21.14 汤姆逊的原子模型

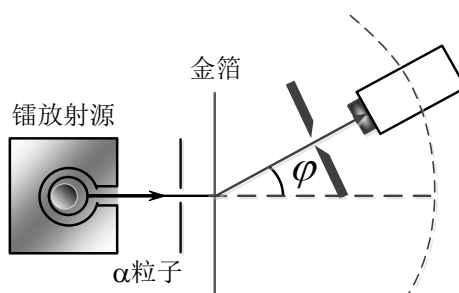
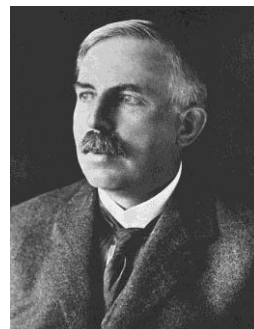


图 21.15 α 粒子散射实验装置示意图

文档21.3
卢瑟福

1908 年卢瑟福试图用 α 粒子散射实验去验证汤姆逊的原子模型。散射实验的实验装置如图 21.15 所示。放射源镭发射出的 α 粒子 (二次电离的氦原子, 氦核 ${}^4_2\text{He}$), 以大约 $c/15$ 的速度轰击金箔, 在原子中带电物质的电场力作用下, 使它偏离原来的入射方向, 从而发生散射现象。由于氦核的质量大约是电子质量的 7500 倍, 所以 α 粒子的运动不受电子的影响。实验结果表明: 绝大部分 α 粒子经金箔散射后, 散射角很小 ($2^\circ \sim 3^\circ$), 但有 $1/8000$ 的 α 粒子偏转角大于 90° , 如图 21.16 所示。显然, 汤姆逊的原子结构模型无法解释这种大角度的散射现象。



卢瑟福

α 粒子散射实验表明原子质量和正电荷集中在原子的中心。于是卢瑟福于 1911 年提出了原子的有核模型结构 (行星模型), 如

图 21.17 所示。其主要内容有

(1) 原子的中心是原子核，原子核几乎占有了原子的全部质量，且集中了原子中全部的正电荷。

(2) 带负电的电子在以核为中心的库仑场中绕着原子核转动，如同行星绕太阳转动一样。

(3) 原子核的体积比原子的体积小得多，原子半径约为 10^{-10}m ，而原子核半径约为 $10^{-14} \sim 10^{-15}\text{m}$ 。

卢瑟福的原子有核模型结构可以成功地解释 α 粒子散射实验：绝大多数的 α 粒子会穿透原子按原方向进行，只有极少数的 α 粒子射入到原子核附近时，才会产生大角度散射。

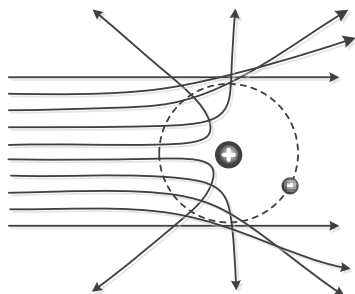


图 21.16 α 粒子在原子核附近散射的示意图

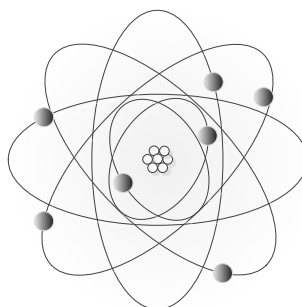


图22.17 原子的核式结构模型

21.4.3 玻尔的氢原子理论

文档21.4
玻尔

卢瑟福的原子有核模型结构可以很好地解释 α 粒子散射实验，但却使经典理论陷入了困境。

按经典电磁理论，电子绕核旋转时，作加速运动，电子将不断地向四周辐射电磁波，这导致它的能量不断减小，于是电子绕核旋转的轨道半径也越来越小，最终将落入原子核中，因而原子是不稳定的。显然，这一结论与实验事实不符。实验表明，原子稳定地存在于自然界中。

此外，根据卢瑟福的有核模型结构，电子绕核旋转时，由于电子的轨道半径及转动频率不断变化，它辐射电磁波的频率应该是连续变化的，原子光谱应该是连续的。但实验测得原子光谱是分立的线状谱线。卢瑟福的有核原子模型无法解释原子光谱的实验规律。

1913年，丹麦年轻的物理学家玻尔(N.Bohr)在卢瑟福的有核模型的基础上，推广了普朗克和爱因斯坦的量子概念，并将量子概念引用到原子中来。提出了关于原子模型的两个假设。



玻尔

1. 定态假设：电子在原子中，可以在一系列特定的、彼此分离的圆形轨道上运动而不辐射电磁波，这时原子处于稳定状态，并具有一定的能量。这些稳定状态称为**定态**（Stationary state）。

2. 频率条件假设：当原子从一个高能量的定态 E_n 跃迁到另一个低能量的定态 E_m 时，会发射一个频率为 ν 的光子，且满足

$$h\nu = E_n - E_m \quad (21.23)$$

式中 h 是普朗克常数，式（21.23）称**频率条件**（frequency condition）。

3. 量子化条件假设：电子以速度 v 在半径为 r 的圆周上绕核运动时，只有电子的角动量 L 等于 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的那些轨道才是稳定的，即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n=1,2,3,4\cdots \quad (21.24)$$

式中 n 称为量子数。式（21.24）称**角动量量子化条件**（angular quantization condition）。

玻尔根据上述三个假设，推出了氢原子定态轨道的半径公式和能量公式，并从理论上导出了氢原子光谱的规律。

氢原子中电子绕核作圆周运动时，所需的向心力就是带正电的原子核对电子的库仑引力，由牛顿运动定律得

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n}$$

再由量子化条件，有

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \quad n=1,2,3,\cdots$$

由上两式可得，氢原子中的电子在第 n 个定态轨道上的运动速度和轨道半径分别为

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n} \quad (21.25)$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 = n^2 r_1 \quad (21.26)$$

式中， r_1 为 $n=1$ 时的电子轨道半径，称为**玻尔半径**（Bohr radius），它是氢原子中电子轨道的最小半径。其值为 $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 。氢原子中各定态电子轨道的示意图，如图 21.18 所示。

电子在原子内运动时，氢原子的能量是电子的动能和势能的总和。若选无穷远处为电势零点，当电子在第 n 个定态轨道上运动时，氢原子的能量为

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad (21.27)$$

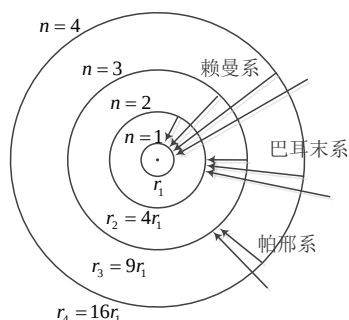


图21.18 氢原子各定态电子轨道示意图

式中 $E_1 = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = -13.6\text{eV}$ ，是 $n=1$ 时氢原子的能量，也称为氢原子的**基态能量**。

由于量子数 n 只能取 1, 2, 3, ... 等正整数，所以原子系统的定态能量是不连续的，也就是说，能量是量子化的。这种不连续的、量子化的能量值称为**能级**（energy level）。氢原子的能级图如图 21.19 所示。人们将 $n=1$ 的定态称为**基态**（ground state），其能级最低，也最稳定； $n>1$ 的各定态统称为**激发态**（excitation state）。例如当 $n=2, 3, \dots$ 时，相应的激发态分别称为第一激发态、第二激发态……。由能级图及式（21.27）可知，氢原子的能级皆为负值，这是由于原子中的电子被束缚在原子核周围，不能自由运动的缘故。随着 n 的增大，各激发态的能级 E_n 也增大；当 $n \rightarrow \infty$ 时， $E_n \rightarrow 0$ ， $r_n \rightarrow \infty$ ，这时电子已脱离核的束缚成为自由电子，或者说：原子被电离了。

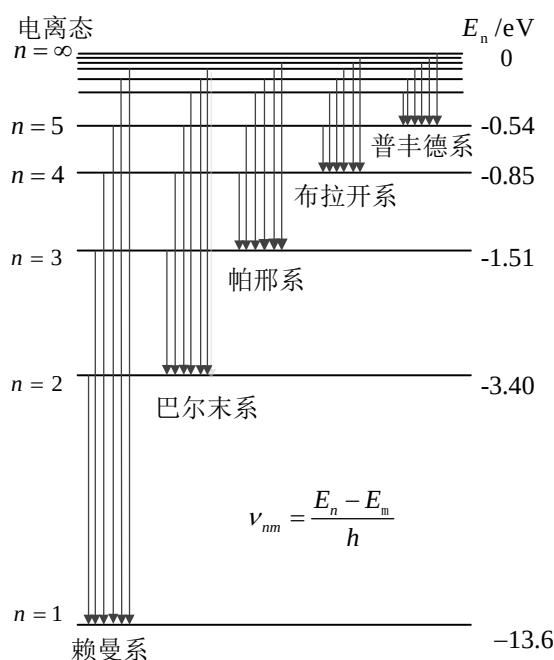


图21.19 氢原子能级跃迁与光谱系

下面来讨论玻尔理论对氢原子光谱规律的理论解释

根据玻尔提出的频率条件假设，当原子从能级较高的定态 E_n 跃迁到能级较低的定态 E_m 时，会发射光子，其频率 ν 满足

$$\nu_{n,m} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

波数为

$$\tilde{\nu}_{n,m} = \frac{1}{\lambda_{n,m}} = \frac{\nu_{n,m}}{c} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

将上式与氢原子光谱的里德伯公式（21.20）相比较可知

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1.097\,373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

这一数值与实验测得的结果 $R_{\text{实验}} = 1.096\,776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ 符合得很好。图 21.18 和图 21.19 示出了氢原子能级跃迁所产生的各谱线系。

玻尔的氢原子理论把氢原子结构和光谱线结构联系了起来，成功地解释了氢原子光谱的实验规律，而且也能很好地说明类氢离子的光谱规律，为人们认识微观世界和建立近代量子理论打下了基础。玻尔因此荣获了 1922 年诺贝尔物理学奖。

玻尔的量子论首次打开了认识原子结构的大门，取得了很大成功，但它的局限性和存在的问题也逐渐为人们认识到。首先，玻尔理论无法解释比氢原子更复杂的原子(如氢和碱土金属原子)的光谱规律；也无法解释谱线的精细结构、强度、偏振等问题。另外，从理论体系上来讲，玻尔理论是半经典半量化的理论，存在逻辑上的缺点，不是一个自洽的理论体系。他一方面将电子视为经典粒子，认为电子的运动有确定的轨道，同时又赋予它带有人为性质的量子化条件来限制其运动，这是不对的。

在向原子结构的量子力学理论过度的进程中，玻尔理论起着承前启后的作用，如同在经典物理和量子物理之间架起了一座桥梁。量子力学就是在克服早期量子论的困难和局限性中建立起来的。

例 21.4 用 12.5eV 的电子轰击基态的氢原子。(1) 试确定氢原子所能达到的最高能级；(2) 氢原子由上述最高能级向基态能级跃迁时，发出光子的可能波长为多少？(3) 欲使处于基态的氢原子电离至少要用多大能量的电子去轰击氢原子？

解：(1) 在正常情况下，原子都处于基态。假设氢原子能将“轰击”电子的能量全部吸收可跃迁到第 n 个定态，则

$$E_n = E_1 + 12.5 = -1.1\text{eV}$$

又 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ ，所以

$$n = \sqrt{\frac{E_1}{E_n}} = \sqrt{\frac{13.6}{1.1}} = 3.5$$

因 n 只能取正整数，所以氢原子最高能达到 $n=3$ 的能级。

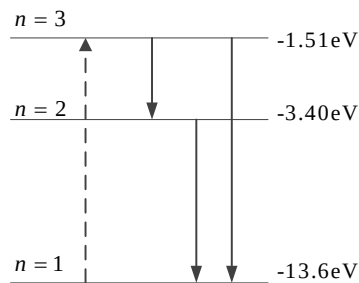


图21.20 例题22.4

(2) 可能的跃迁方式如图 21.20 所示，所以可能有三条谱线，其频率和波长分别为

$$\nu_{32} = \frac{|E_3 - E_2|}{h} = \frac{[-1.51 - (-3.40)] \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} (\text{Hz}) = 4.56 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda_{32} = \frac{c}{\nu_{32}} = 6.577 \times 10^{-7} \text{ m} = 657.7 \text{ nm} \quad \text{属于可见光}$$

$$\nu_{21} = \frac{|E_2 - E_1|}{h} = \frac{[-3.40 - (-13.6)] \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} (\text{Hz}) = 2.46 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda_{21} = \frac{c}{\nu_{21}} = 1.219 \times 10^{-7} \text{ m} = 121.9 \text{ nm} \quad \text{属于紫外线}$$

$$\nu_{31} = \frac{|E_3 - E_1|}{h} = \frac{[-1.51 - (-13.6)] \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} (\text{Hz}) = 2.92 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\lambda_{31} = \frac{c}{\nu_{31}} = 1.028 \times 10^{-7} \text{ m} = 102.8 \text{ nm} \quad \text{属于紫外线}$$

(3) 因为氢原子的电离能

$$E_{\text{电离}} = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13.6 \text{ eV}) = 13.6 \text{ eV}$$

所以电子的能量至少要有 13.6 eV。

§ 21.5 弗兰克—赫兹实验

1914 年，德国物理学家弗兰克与赫兹（电磁波的发现者赫兹的侄子）合作，进行了著名的电子与原子的碰撞实验。他们在实验中，通过使电子与原子发生碰撞，进行能量交换，其最初目的是为了精确测量原子的电离电势。但是，实验所得到的伏安曲线明显地揭示出原子内部确实存在一系列分立的能态，即原子能级，从而证明了玻尔理论中关于定态假设的正确性。他们也因这一成就获得了 1925 年诺贝尔物理学奖。

图 21.21 是弗兰克-赫兹实验装置示意图。充有低压水银蒸汽的玻璃管内装了三个电极：灯丝 K、网状控制栅极 G、板极 P。电子从通电加热的灯丝发射出来，在加速电压 U_0 作用下向栅极方向加速运动。板极的电势稍低于栅极的电势，两者之间是反向电压，通过栅极的电子，如果拥有足够的动能，就能够冲过反向拒斥电场而到达板极形成板极电流 I_p 。

板极电流随加速电压 U_0 变化的实验结果如图 21.22 所示。从图中可以看出，当加速电压很低，小于 4.9 伏特时，随着电压的增加，板极电流也平稳地单调递增。当电压达到 4.9 伏特后，电流急剧降低，出现图中第一个波谷。继续增加加速电压，电流再一次随着电压的增大而平稳地增加，直到电压达到 9.80 伏特时，又观察到类似的电流急剧降低的现象，出现图中

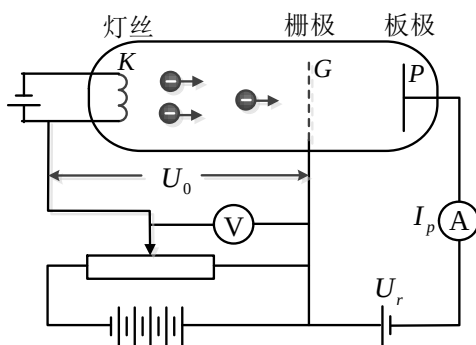


图21.21 弗兰克-赫兹实验装置示意图

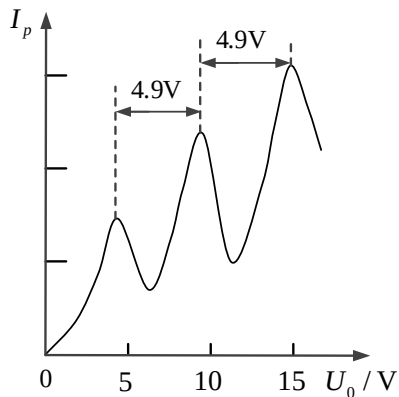


图21.22 板极电流和加速电压之间的关系

第二个波谷。电压继续增加时，上述现象会再次出现，即：电压每增加 4.9 伏特，电流就会先达到一个峰值，然后急剧降低。

怎样解释上述实验结果呢？人们发现利用加速电子与汞原子的碰撞模型，使汞原子吸收电子能量而激发，不仅可以解释上述实验结果，还证实了玻尔理论中关于定态能级的假设。

设汞原子基态能量为 E_1 ，第一激发态能量为 E_2 。从灯丝发射出来的电子，在加速电压 U_0 的作用下向栅极作加速运动时，其动能将越来越大。当加速电压较低时，电子到达栅极时获得的动能 $E_k = eU_0 < E_2 - E_1$ ，即使在运动过程中它与原子相碰撞也不能使 Hg 原子激发到第一激发态，电子与 Hg 原子的碰撞属于完全弹性碰撞，碰撞后电子无能量损失，因此能穿过栅极到达板极的电子所形成的 I_p 随加速电压 U_0 的增加而增大。当电子的动能大于或等于汞原子第一激发态能量 E_2 与基态能量 E_1 之差时，即 $E_k = eU_0 \geq E_2 - E_1$ 时，电子运动到栅极附近时，就可以获得足够的大的动能与汞原子发生非弹性碰撞，将自己的全部或大部分能量传递给汞原子，使其从基态跃迁到第一激发态，而电子本身所剩的动能太小，以至于通过栅极后不能克服反向拒斥电场到达板极，所以板极电流将显著减小。然后随着加速电压的继续增加，电子在到达栅极以前的半路上就可能与汞原子发生非弹性碰撞，然后继续获得加速，到达栅极时再次积累起穿过拒斥电场所需的动能而到达板极，使电流回升。当加速电压 U_0 使电子的动能大于或等于汞原子第一激发态能量 E_2 与基态能量 E_1 之差的两倍时，电子在栅极附近会因第二次非弹性碰撞而失去能量，因而又会造成第二次板极电流的下降。同理，凡是在加速电压 U_0 使电子的动能大于或等于汞原子第一激发态能量 E_2 与基态能量 E_1 之差的整数倍时，板极电流都会相应下降，形成如图 21.22 所示之规则起伏变化的曲线。显然汞原子的第一激发态能量 E_2 与基态能量 E_1 之差为 4.9eV，而相邻两次板极电流峰值所对应的加速电压之差 $U_{n+1} - U_n$ 也等于 4.9eV，所以汞原子的第一激发电势为 4.9eV。

处于第一激发态的汞原子经历极短时间就会返回基态，这时应有光子发射出来，光子能量为 $h\nu = E_2 - E_1 = eU_0$ ，计算可得光的波长为

$$\lambda = \frac{ch}{E_2 - E_1} = \frac{ch}{eU_0} = 254 \text{ nm}$$

在实验中，确实观测到了波长 $\lambda = 253\text{nm}$ 的这样一条谱线，为原子能级的存在提供了直接的实验证据。

思考题

21.1 为什么山洞口从远处看总是黑色的？

21.2 什么黑体？黑体总是黑色的吗？

21.3 任何物体都能发射电磁辐射，为什么用肉眼看不见黑暗中的物体呢？

21.4 普朗克提出了能量量子化的概念，在经典物理学范围内，有没有量子化的物理量呢，如果有，请举例说明。

21.5 在光电效应实验中，如果入射光的频率增加一倍，按光子理论会有什么结果？如果是入射光强度增加一倍呢？

21.6 光电效应和康普顿效应都是光子和电子间的相互作用，这两个过程有什么不同？

21.7 用可见光能否观察到康普顿散射现象？

21.8 试比较和说明，氢原子的波尔模型和行星绕太阳轨道运动模型之间的相似之处和区别。

21.9 根据氢原子的波尔理论，当氢原子处于 $n=4$ 的激发态时，可发射几种波长的光？

习 题

文档21.5
第21章习题答案

本章习题中几个常用的物理常数

普朗克常量： $h=6.63\times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ ；基本电荷： $e=1.60\times 10^{-19}\text{C}$

电子静止质量： $m_e=9.11\times 10^{-31}\text{kg}$ ；真空中的光速： $c=3.0\times 10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

21.10 假设人体的辐射可以看成是黑体辐射，人的正常体温是 37.0°C ，则人体热辐射最强的波长是多少？（取三位有效数字）

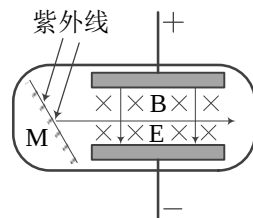
21.11 估测星球表面温度的方法之一是将星球看成黑体，测量它的辐射峰值波长 λ_m ，利用维恩位移定律便可估计其表面温度。如果测得天狼星的 λ_m 为 $0.290\mu\text{m}$ ，试计算它的表面温度。

21.12 假设太阳表面温度 5800K ，太阳半径为 $6.96\times 10^8\text{m}$ 。如果认为太阳的辐射是稳定的，试求太阳在 1 年内由于热辐射而减少的质量。

21.13 用单色光照射某一金属产生光电效应，如果入射光的波长从 400nm 减到 360nm ，试求遏止电压的改变量。

21.14 以波长为 $\lambda=410\text{nm}$ 的单色光照射某一金属，产生的光电子的最大初动能为 $E_k=1.00\text{eV}$ ，试求能使该金属产生光电效应的单色光的最大波长。

21.15 如图所示，某金属 M 的红限波长 $\lambda_0=260\text{nm}$ 。今用单色紫外线照射该金属，发现有光电子逸出，其中速度最大的光电子可以匀速、直线地穿过一个均匀电场（场强 $E=5.00\times 10^5\text{V/m}$ ）和均匀磁场（磁感应强度为 $B=5.00\times 10^{-3}\text{T}$ ）共存且互相垂直的区域，试求：



题21.15图

(1) 光电子的最大速度 v ；

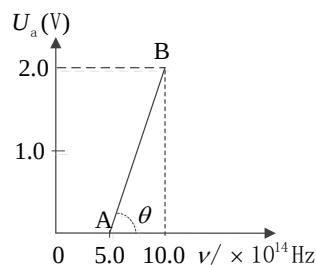
(2) 单色紫外线的波长 λ 。

21.16 图中所示为在一次光电效应实验中得出的曲线。

(1) 由图中数据求出该金属的红限频率；

(2) 求证：对不同材料的金属，直线 AB 的斜率相同；

(3) 由图中数据求出普朗克恒量 h 。



题21.16图

21.17 用波长 $\lambda_0=1.00\times 10^{-10}\text{m}$ 的 X 射线做康普顿实验，在与入射方向垂直的方向上观察散射波。试求。

- (1) 散射波中康普顿散射的波长;
- (2) 反冲电子获得的动能。

21.18 在康普顿散射实验中, 入射 X 射线的波长为 $3.00 \times 10^{-12} \text{ m}$, 在 $\varphi = 60^\circ$ 的方向上观察散射光。试求:

- (1) 散射波中康普顿散射的波长;
- (2) 反冲电子获得的动能;
- (3) 反冲电子动量的大小。

21.19 假定在康普顿散射实验中, 入射光的波长 $\lambda_0 = 3.00 \times 10^{-12} \text{ m}$, 反冲电子的速度 $v = 0.6c$, 试求:

- (1) 散射光的波长 λ ;
- (2) 散射角 θ 。

21.20 已知入射 X 射线光子的能量为 0.60 MeV , 若在康普顿散射中散射光子的波长为入射光子的 1.2 倍, 散射前电子可视为静止的自由电子。试求:

- (1) 散射光子的散射角 θ ;
- (2) 反冲电子的动能 E_K 。

21.21 试求出氢原子光谱中巴尔末系的最长和最短波长?

21.22 当氢原子从某初始状态跃迁到激发能 (从基态到激发态所需的能量) 为 $\Delta E = 10.19 \text{ eV}$ 的状态时, 发射出光子的波长是 $\lambda = 486 \text{ nm}$ 。试求: 该初始状态的能量和主量子数。

21.23 氢原子光谱的巴耳末线系中, 有一光谱线的波长为 $\lambda = 434 \text{ nm}$ 。试求:

- (1) 与这一谱线相应的光子能量;
- (2) 该谱线是氢原子由能级 E_n 跃迁到能级 E_k 产生的, n 和 k 各为多少?
- (3) 最高能级为 E_5 的大量氢原子, 最多可以发射几个谱线系、共几条谱线。请在氢原子能级图中表示出来, 并说明波长最短的是哪一条谱线。

第 22 章 量子力学基础

第二十二章
PPT课件下载

量子力学是描述微观粒子运动规律的系统理论。自从 1924 年德布罗意提出微观粒子的波粒二象性假设之后,人们开始研究微观粒子的本性及其运动规律。经过海森伯(W. K. Heisenberg)、薛定谔(E. Schrödinger)、玻恩(Max Born)和狄拉克(Paul Dirac)等人的开创性工作,从 1925 年到 1928 年基本形成了完整的量子力学理论体系。它与爱因斯坦的相对论并肩成为现代物理学的两大理论支柱。

本章从微观粒子的波粒二象性出发,先讨论微观粒子的不确定关系,然后引入描述微观粒子运动状态的特殊方法——波函数,并介绍波函数必须遵守的波动方程——薛定谔方程,最后讨论薛定谔方程在一维定态问题中的应用。

§22.1 德布罗意波 微观粒子的二象性

光的干涉,衍射和偏振现象证明光具有波动性,而黑体辐射、光电效应和康普顿效应则为光具有粒子性(即量子性)提供了有力的实验证据。特别是在 1921 年爱因斯坦因用光量子概念解释了光电效应的实验规律而获得诺贝尔奖之后,光具有波粒二象性的概念,已被人们理解和接受。于是,物理学家从自然界应该具有和谐对称的角度开始思考:光,作为光子(静止质量为零的粒子)具有波动性,那么静止质量不为零的实物粒子,如电子、质子、中子,甚至宏观运动物体,是否也具有波动性呢?即是否一切物质都具有波粒二象性呢?

22.1.1 德布罗意物质波假设

文档22.1
德布罗意

1923 年,法国物理学家路易·德布罗意在题为《辐射一波与量子》一文中第一次提出了实物粒子具有波动性的观点,并于 1924 年在他的博士论文《量子论研究》中进一步作了系统的阐述。德布罗意认为,如同过去对光的认识比较片面一样,对实物粒子的认识或许也是片面的,波粒二象性并不只是光才具有的,实物粒子也应该具有波粒二象性。德布罗意说道:“整个世纪以来,在光学上,比起波动的研究方面来,是过于忽视了粒子的研究方面;在物质粒子理论上,是否发生了相反的错误呢?是不是我们把关于粒子的图像想的太多,而过分地忽视了波的图像?”德布罗意把光中对波和粒子的描述,应用到实物粒子上,作了如下假设:每一运动着的实物粒子都有一个波与之相联系,粒子的动量与此波波长关系如同光子情况一样,即具有确定能量 E 和动量 P 的自由粒子,其对应的平面单色波的频率和波长与 E 和 P 的关系分别为:

$$E = h\nu \quad (22.1)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (22.2)$$

式(22.1)和(22.2)称为**德布罗意关系式**(De Broglie formula),与实物粒子相联系的



德布罗意

波称为**德布罗意波**（de Broglie wave）或**物质波**（matter wave）。

由式（22.2）可知，对于具有静止质量为 m_0 的实物粒子，当它以速度 v 运动时，与其对应的平面单色波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (22.3)$$

式中： $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ，当 $v \ll c$ 时，可取 $m = m_0$

以电子为例，设加速电压为 U ，电子经电场加速后速率为 v ，当 $v \ll c$ 时，电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} \quad (22.4)$$

因为此时有

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU$$

所以

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_0 e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}}} \frac{1}{\sqrt{U}} \\ &= \frac{12.2 \times 10^{-10}}{\sqrt{U}} \text{ m} = \frac{12.2}{\sqrt{U}} \text{ \AA} \end{aligned} \quad (22.5)$$

当加速电压 $U = 200\text{V}$ 时，可算得电子的德布罗意波长为 $\lambda = 0.0863\text{nm}$ ，而当 $U = 10000\text{V}$ 时， $\lambda = 0.0122\text{nm}$ ，所以电子的德布罗意波长很短，与X射线波长的数量级相当。

如果将德布罗意的物质波思想应用到氢原子上，可以很自然地得出波尔氢原子理论中的角动量量子化条件，而不需要像波尔理论那样做出人为假设。根据波动理论，电子绕核的圆周运动可以看成是一种波动，在定态下该波必须是驻波，且圆周的周长应等于波长的整数倍。

若电子绕核运动的轨道半径为 r ，电子的德布罗意波长为 λ 。当满足 $2\pi r = n\lambda$ ， $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 时，物质波形成驻波，电子在相应的定态轨道上运动而不辐射能量。将德布

罗意关系式 $\lambda = \frac{h}{mv}$ 代入上式得， $2\pi r m v = nh$ ，即有

$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$ 。这正是波尔氢原子理论的角动量量子化条件。

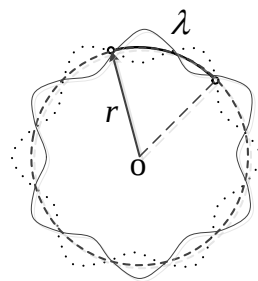


图22.1 圆轨道上的驻波示意图

22.1.2 电子衍射实验

在德布罗意刚提出物质波假设时，除了爱因斯坦，薛定谔等少数几位著名物理学家外，许多物理学家都认为德布罗意提出的物质波假设只不过是形式上和光子理论的对比，并没有物理上的实质内容。但这一假设很快就得到了实验证实。

1927 年，美国物理学家戴维孙（C. J. Davisson）和革末（L. H. Germer）对镍片的表面进行了实验研究，实验装置如图 22.2（a）所示。电子枪发射的电子束，经电场加速后垂直投射到样品的表面上，被表面散射后向各个方向射出。在各个方向上的散射电子经电子探测器收集，其强度由电流计测出。镍和许多其它金属一样是一种多晶材料，这种材料是由大量无规则排列的微小晶粒组合而成的。一般情况下，实验测得的散射电子束的强度分布随散射角 θ 呈现平滑地变化。但是，在一次实验中，由于真空室漏气，从而使样品表面被氧化。为了清除氧化膜，他们对镍片进行了高温加热，结果使原来的多晶镍中的微小晶体排列整齐，出现了面积较大的单晶区域。接下来的实验结果和先前预期的大不一样，散射电子束的强度随着散射角的不同而出现极大值和极小值，且强度极大值时的角度 θ 与电子束的加速电压 U 有关。当加速电压 $U = 54 \text{ V}$ 伏时，沿散射角 $\theta = 50^\circ$ 的方向探测到散射电子束强度出现一个明显的极大值，如图 22.2（b）所示。实验结果出乎意料，于是，戴维孙和革末制备了单晶镍靶进行了进一步的研究，结果都有如图 22.2（b）所示的规律。显然这个结果不能用粒子运动来解释，但可以用类似于 X 射线在晶体表面的衍射理论来分析。

如图 22.2（c）所示，设 d 为镍单晶的晶格常数，则 $d \sin \frac{\theta}{2}$ 为镍单晶中一个晶面簇的晶面间距， $\pi - \theta/2$ 为掠射角，由布拉格公式（参见第 19 章式 19.31）可知，满足衍射加强的条件为：

$$2d \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) = 2d \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

即：

$$d \sin \theta = k\lambda \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

此外，借助 X 射线衍射实验，测得镍单晶的晶格常数为： $d = 2.15 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。当 $k=1$ ， $\theta = 50$ 时，实验得入射波的波长为

$$\lambda = d \sin \theta = 1.65 \times 10^{-10} \text{ m}$$

而根据德布罗意关系式，与该电子束对应的物质波波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{12.2}{\sqrt{U}} \times 10^{-10} \text{ m} = \frac{12.2}{\sqrt{54}} \times 10^{-10} \text{ m} = 1.67 \times 10^{-10} \text{ m}$$

显然，实验值与理论值颇为吻合。所以戴维孙—革末实验既验证了电子确实具有波动性，同时也检验了德布罗意关系式的正确性。

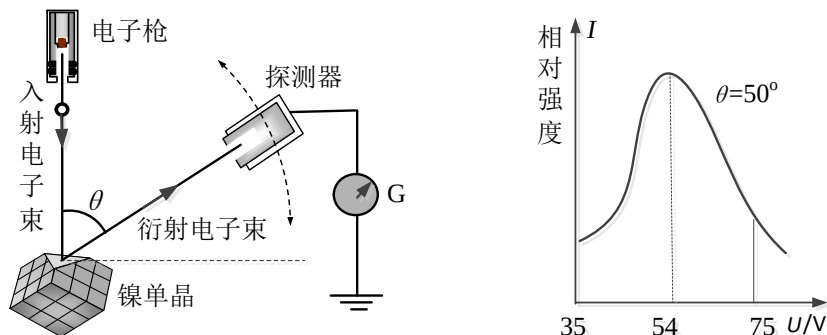
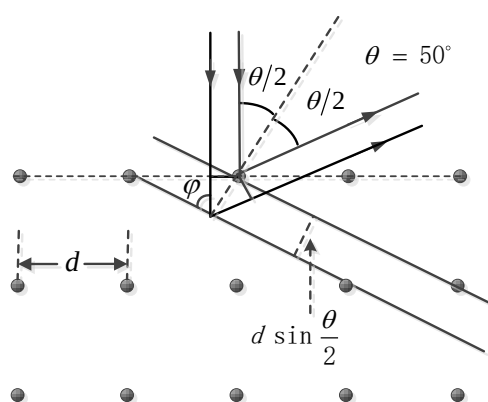


图22.2 (a) 戴维孙—革末实验装置示意图 (b) $\theta=50^\circ$ 时的电流与加速电压关系曲线



(c) 晶体对垂直投射电子的衍射

1927 年，汤姆逊（G.P.Thomson）进行了电子透过金属多晶薄膜的实验，发现电子能够象 X 射线一样产生衍射现象。在薄膜后的屏上观测到了如图 22.3 所示的圆环状电子衍射条纹，并且，该实验同样能够证实电子衍射时的波长满足德布罗意关系式。戴维孙和汤姆逊因各自独立发现电子在晶体中的衍射现象，验证了电子的波动性和德布罗意关系式，共同分享了 1937 年的诺贝尔物理学奖。

1961 年，约恩逊（C.Jönsson）直接进行了电子的双缝干涉实验。他在铜膜上刻出了间距 $d \approx 1\mu\text{m}$ ，宽为 $b \approx 0.3\mu\text{m}$ 的双缝，将波长 $\lambda \approx 0.5 \times 10^{-2}\text{nm}$ 电子束垂直入射到双缝上，在观测屏上获得了如图 22.4 所示双缝干涉图样，再一次验证了电子的波动性和德布罗意关系式的正确性。

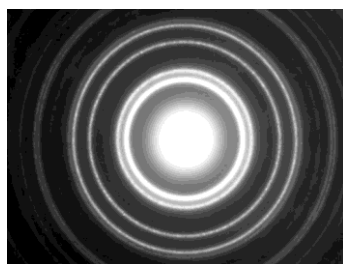


图22.3 电子射线通过多晶铝箔时的衍射图样

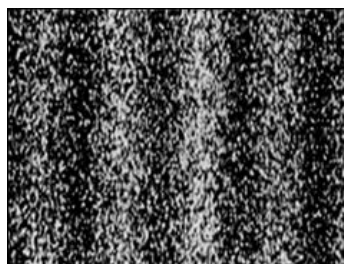


图22.4 电子双缝干涉图样

22.1.3 微观粒子的波粒二象性

电子的波动性获得了实验证实以后, 中子衍射、原子和分子束在晶体表面散射所产生的衍射实验接连获得了成功, 证实了这些粒子同样具有波动性, 且德布罗意关系同样成立。自此, 德布罗意的物质波假设最终得到了完全证实。德布罗意公式也已成为表示中子、电子、质子、原子和分子等微观粒子波动性和粒子性之间关系的基本公式。

微观粒子的波动性在现代科学技术上得到了广泛的应用。1932 年德国人鲁斯卡成功研制的电子显微镜就是一个典型的例子。光学显微镜由于受到可见光波长的限制, 分辨率不是很高, 极限放大倍数只有 2000 倍左右, 最小分辨距离约为入射可见光波长的一半, 即 200 nm。但是对于电子显微镜来说, 当加速电压 U 为几百伏特时, 电子的德布罗意波长和 X 射线的波长相近, 如果加速电压增大到几万伏特, 则其德布罗意波长更短。由于电子波长比可见光波长短得多, 所以电子显微镜具有比光学显微镜高得多的分辨率, 可将微小物体的影像放大几十万倍。目前电子显微镜已经成为探索微观世界的基本工具。

例 22.1 计算经过电势差 $U_1 = 150\text{V}$ 和 $U_2 = 10^4\text{V}$ 加速的电子的德布罗意波长 (不考虑相对论效应)。

解: 根据德布罗意关系 $p = h / \lambda$, 电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 e} \sqrt{U}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}} \text{ nm}$$

将 $U_1 = 150\text{V}$ 和 $U_2 = 10^4\text{V}$ 分别代入得, $\lambda_1 = 0.100 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 0.0123\text{nm}$ 。显然电子德布罗意波长远小于可见光波波长, 因而基于电子波动性的电子显微镜分辨率远大于光学显微镜分辨率。

例 22.2 求一颗质量 $m = 0.01\text{kg}$, 速度 $v = 300\text{m/s}$ 的子弹的德布罗意波长。

解: 根据德布罗意关系, 子弹的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.01 \times 300} (\text{m}) = 2.21 \times 10^{-34} \text{ m}$$

显然该波长极其微小, 远远超出了目前人类所有仪器的测量极限, 即宏观物体的德布罗意波长小得难以测量, 所以“宏观物体只表现出粒子性”。

§22.2 不确定关系

22.2.1 位置与动量的不确定关系

在经典力学中, 任一时刻粒子的坐标和动量都有确定值, 所以可用坐标和动量描述粒子的运动状态。那么, 对于具有波粒二象性的微观粒子是否也可以这样做呢? 1927 年, 德国物理学家海森伯提出了**不确定关系** (uncertainty relation), 说明微观粒子不能同时具

有确定的位置和动量。

下面用电子的单缝衍射实验来说明这个问题。设具有单一能量的平行电子束，沿 y 轴方向入射到宽为 a 的单缝上。由单缝衍射理论可知，电子束经过单缝衍射时，衍射图样关于 y 轴对称，如图 22.5 所示。

设入射电子束的速度为 v ，动量为 p ，由德布罗意关系式可知，电子波长为 $\lambda = h/p$ 。

若单缝衍射第 1 级衍射极小对应衍射角为 φ ，则根据单缝衍射的暗纹公式，有：

$$a \sin \varphi = \lambda \quad (22-6)$$



海森伯

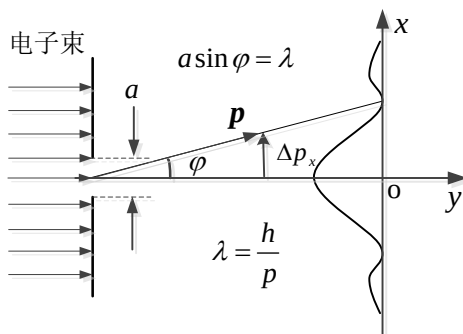


图22.5 电子单缝衍射示意图

通过缝后，电子发生了衍射，其运动方向发生了变化，即动量方向发生了变化。在 φ 角内，动量在 x 方向分量 P_x 满足下式：

$$0 \leq P_x \leq P \sin \varphi \quad (22-7)$$

故 P_x 的不确定量为

$$\Delta P_x = P \sin \varphi \quad (22-8)$$

此 ΔP_x 也可以理解为电子在通过狭缝的瞬间，电子在 x 方向获得的动量的不确定度。由式 (22-6)、(22-8) 有

$$a \Delta P_x = p \cdot \lambda = h \quad (22-9)$$

当电子通过狭缝时，人们只知道它是从宽度为 a 的狭缝通过的，却不能确定它由狭缝上的那一位置通过。换句话说：电子在通过狭缝的瞬间，如果我们要测定该时刻电子在垂直于狭缝方向上的位置坐标 x ，则测量坐标 x 的不确定度 Δx 等于缝宽度 a ，即： $\Delta x = a$ 。

所以式 (22.9) 可以写为 $\Delta x \cdot \Delta P_x = h$ (22-10)

若考虑到还有第 2、第 3 级衍射， ΔP_x 还会更大一些，于是有

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h \quad (22-11)$$

将式(22-11)推广到三维空间, 则有

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq h, \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq h, \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq h$$

这就是**位置和动量的不确定关系** (uncertainty relation of coordinate and momentum)。需要指出: 根据量子力学理论给出的严格的不确定关系应为

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq \hbar/2, \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq \hbar/2 \quad (22-12)$$

不确定关系表明, Δx 、 ΔP_x 不可能同时为零, 即微观粒子的位置坐标和相应方向的动量不能同时准确确定。通俗的说: 在同时测量粒子的位置和动量时, 若对其位置的测量精度越高, 即 Δx 越小, 则在同时测量其相应方向上的动量时, 动量的不确定度越大, 即 ΔP_x 越大。反之亦然。

不确定关系式可从电子单缝衍射现象得出, 而电子单缝衍射现象是物质波动性的一种表现。因此, 不确定关系是微观粒子具有波粒二象性的必然反映, 是自然界的客观规律。

例 22.3 一颗质量为 $10g$ 的子弹, 具有 $200m \cdot s^{-1}$ 的速率, 若其动量的不确定范围为动量的 0.01% (这在宏观范围是十分精确的), 则该子弹位置的不确定量范围为多大?

解: 由题意知, 子弹的动量为

$$p = mv = 2kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

动量的不确定范围为

$$\Delta p = 0.01\% \times p = 2 \times 10^{-4} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

所以, 子弹位置的不确定量范围为

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-4}} m = 3.3 \times 10^{-30} m$$

显然, 这样小的不确定度相对于子弹的宏观尺寸来说时没有任何意义的。所以宏观运动物体不必考虑其波动性。

例 22.4 一电子具有 $200m \cdot s^{-1}$ 的速率, 其动量的不确定范围为动量的 0.01% (这也是足够精确的了), 则该电子的位置不确定范围有多大?

解 电子的动量

$$p = mv = 9.1 \times 10^{-31} \times 200kg \cdot m \cdot s^{-1} = 1.82 \times 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

动量的不确定范围

$$\Delta p = 0.01\% \times p = 1.82 \times 10^{-32} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

位置的不确定量范围

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.82 \times 10^{-32}} \text{ m} = 3.64 \times 10^{-2} \text{ m}$$

已确定原子大小的数量级为 10^{-10} m ，电子则更小，在这种情况下，电子位置不确定量远大于电子本身线度，所以，此时必须考虑电子的波粒二象性。

22.2.2 能量与时间的不确定关系

不确定关系不仅存在于位置和动量之间，也存在于能量和时间之间。如果微观粒子处于某一状态的时间(平均寿命)为 Δt ，该状态对应的能量不确定量(即能级宽度)为 ΔE ，由量子力学理论可得

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (22-1)$$

这称为**能量与时间的不确定关系** (uncertainty relation of energy and time)。上式表明：原子在某一能量状态(即能级)的平均寿命 Δt 越长，该能级所对应的能量不确定度(即能级宽度) ΔE 越小，这样的能级也越稳定。一般来说，原子处在激发态的典型的平均寿命

为 $\Delta t \approx 10^{-8} \text{ s}$ ，所以原子激发态的能级宽度为 $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 10^{-8} \text{ eV}$ ；而原子的基态是稳定的，其能级宽度为零。所以当原子从激发态向基态跃迁时，发出的光谱线就有一定的宽度。

§22.3 波函数 薛定谔方程

22.3.1 波函数的引入

宏观物体的运动状态可以由位置坐标和动量来描述，而对于微观粒子，由不确定关系可知，其位置和动量不可能同时被确定，因此具有波粒二象性的微观粒子的运动状态不能由位置坐标和动量来描述。那么，微观粒子的运动状态用什么物理量来描述呢？

1925 年，薛定谔在德布罗意物质波假说的基础上建立了量子力学理论，提出用物质波**波函数** (wave function) 来描述微观粒子的运动状态。下面我们从量子力学的基本观点出发，建立自由粒子的波函数。

在经典波动学中，描述波动过程的数学函数(波函数)都是空间、时间的二元函数，一列沿 x 轴正向传播的平面单色简谐波的波函数为

$$y(x,t) = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

对于机械波， $y(x,t)$ 表示质点离开平衡位置的位移；对电磁波， $y(x,t)$ 表示电场强度或磁场强度。在波动理论中，波函数也可以用复数形式表示，即

$$y(x,t) = Ae^{-i2\pi\left(vt - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

上式中的实部就是经典波动学中的可观测量，如位移、电场强度和磁场强度等。

根据德布罗意的物质波假说，质量为 m 、速度为 v 的自由粒子，一方面可用能量 E 和动量 p 来描述它的粒子性；另一方面可用频率 ν 和波长 λ 来描述它的波动性。

取自由粒子运动方向为 x 轴正向，由于自由粒子能量、动量均为常量，所以与其对应的物质波的频率 ν 和波长 λ 均不随时间变化，即与自由粒子对应的物质波是单色平面波。在量子力学中，描述微观粒子运动状态的波函数均用复数形式，所以描述自由粒子运动状态的物质波波函数 $\Psi(x,t)$ 为

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-i2\pi\left(vt - \frac{x}{\lambda}\right)} \quad (22-14)$$

再由德布罗意关系式： $E = h\nu$ ， $P = \frac{h}{\lambda}$ 和 $h = \frac{h}{2\pi}$ ，有

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{h}(Et - px)} \quad (22-15)$$

对于沿 $\mathbf{r}$ 方向运动的自由粒子，描述其运动状态的波函数 $\Psi(\mathbf{r},t)$ 为

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{h}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (22-16)$$

式 (22-15)、和式 (22.16) 就是自由粒子的波函数。

对于处在外场作用下的非自由粒子，其能量和动量不是常量，与其对应的的德布罗意波就不是单色平面波。外场不同，粒子的运动状态及描述运动状态的波函数的数学表达式也不相同。

22.3.2 波函数的统计解释

文档22.3
波恩

机械波的波函数表示媒质中各质元离开平衡位置的位移，电磁波的波函数表示空间各点电场或磁场强度。那么，物质波的波函数表示什么呢？这个问题曾经在一段时间内困扰了不少的物理学家，他们先后提出过多种解释。现在人们普遍接受的是玻恩于 1926 年提出的对波函数的统计解释，即在某一时刻，微观粒子在空间某处出现的概率与物质波在该处的强度成正比。

玻恩提出：若描述微观粒子运动状态的波函数为 $\Psi(\mathbf{r},t)$ ，则在 t 时刻、空间 $\mathbf{r}$ 处 dV 体积元内发现粒子的概率为

$$dP(\mathbf{r},t) = |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 dV = \Psi(\mathbf{r},t)\Psi^*(\mathbf{r},t)dV \quad (22.17)$$

式中 $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \Psi(\mathbf{r},t)\Psi^*(\mathbf{r},t)$ 是波函数的模的平方，也就是在

t 时刻、空间 $\mathbf{r}$ 处波的强度。其中， $\Psi^*(\mathbf{r},t)$ 是 $\Psi(\mathbf{r},t)$ 的共轭复数。显然在 t 时刻、空间 $\mathbf{r}$ 处附近单位体积内发现粒子的概率为



玻恩

$$p(\mathbf{r},t)=|\Psi(\mathbf{r},t)|^2=\Psi(\mathbf{r},t)\Psi^*(\mathbf{r},t) \quad (22.18)$$

称为粒子在空间出现的**概率密度**（probability density）。

对于某个微观粒子，它要么出现在空间的这个区域，要么出现在空间的那个区域，于是粒子在整个空间出现的概率是100%，因此有

$$\iiint |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 dV = \iiint \Psi(\mathbf{r},t)\Psi^*(\mathbf{r},t) dV = 1 \quad (22-19)$$

上式称为**波函数的归一化条件**（normalizing condition）。满足这一条件的波函数称为归一化的波函数。

此外，在某个给定的时刻，粒子在空间某处出现的概率是一个确定的值，而且粒子在空间各处出现的概率分布不可能出现突变，所以描述粒子运动状态的波函数，除了应满足上述归一化条件之外，还应满足单值、连续、有限三个条件。我们把**单值、连续、有限**称为**波函数的标准条件**。凡是不满足标准条件的波函数，在量子力学中是没有意义的，而且所有的波函数都应满足归一化条件。

由此可知，根据玻恩提出的统计解释，德布罗意提出的物质波是**概率波**（probability wave）。波函数的强度，即波函数的模的平方反应了粒子在空间出现的概率分布。这与电磁波或机械波中关于波强的概念是完全不同的。因为在电磁波或机械波中，波的强度代表了波的平均能流密度。对于波长和频率相同的两列机械波，如果一列波的振幅是另一列的2倍，则它的强度（能流密度）是另一列的4倍，所以这是两列不同的机械波。但在物质波中，粒子在空间出现的概率分布取决于物质波的相对强度分布，将波函数的振幅增加C（C为任意常数）倍，不改变粒子在空间出现的概率分布。所以 $\Psi(\mathbf{r},t)$ 和 $C\Psi(\mathbf{r},t)$ 表示了微观粒子的同一个运动状态，也正是因为这样，波函数才需要归一化。

关于光在干涉、衍射中的光强分布问题，我们既可以用波动理论来解释，也可以用光子观点给予解释。根据波动观点，光是一种电磁波，在干涉或衍射图样中，明纹处表示波的强度大，暗纹处表示波的强度最小。根据光子观点，光强大处表示单位时间内到达该处的光子数多，光强小处表示单位时间到达该处的光子数少。从统计观点看，这相当于说：光子到达明纹处的概率大于到达暗纹处的概率。因此可以说，光子在某处出现的概率与该处光波的强度成正比。

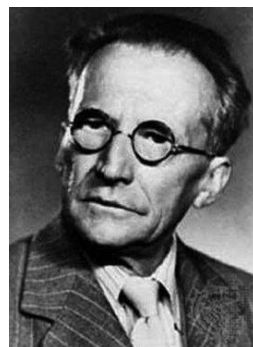
在电子的衍射实验或双缝干涉实验中，实验发现，如果我们将电子一个一个地通过，在底片上将会出现一个一个分散的点，这显示出电子的粒子性和随机分布的特点。但随着“曝光时间”的延长，电子数目的增多，会逐渐形成衍射或干涉图样，这显示出电子具有波动性。因此，从粒子观点来看，在照相底片的明条纹处，电子在该处出现的概率大；在暗条纹处，概率小；而从波动观点来看，在明条纹处电子波的强度大，在暗条纹处电子波的强度小。所以电子在空间各处出现的概率与该处电子波的强度成正比，也就是与该处波函数的模的平方成正比。

必须指出，微观粒子的运动状态用波函数描述是量子力学理论中的5个基本假设之一。

22.3.3 薛定谔方程

文档22.4
薛定谔

由于微观粒子具有波粒二象性，因此在量子力学中，微观粒子的运动状态由波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 来描述。前面我们给出了自由粒子的波函数，并讨论了玻恩于 1926 年提出的对波函数的统计解释。当粒子受到外界的作用时，其运动状态将会发生变化，描述其运动状态的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 也会发生变化。那么描述微观粒子运动状态的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 随时间的变化应遵循怎样的规律呢？1926 年，奥地利物理学家薛定谔建立的波动方程——**薛定谔方程** (Schrödinger equation)，成功地解决了这一问题。



薛定谔

下面我们以一种简单的方法来建立薛定谔方程。

先讨论自由粒子的情况。在“波函数的引入”一节中，已经指出：描述质量为 m ，动量为 p ，能量为 E ，沿 x 轴正向运动的一维自由粒子运动状态的波函数为

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \quad (22-20)$$

对此波函数取 x 的二阶偏导数和 t 的一阶偏导数，可得

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi(x, t) \quad (22-21)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi(x, t) \quad (22-22)$$

对于低速运动 ($v \ll c$) 的自由粒子，其能量为

$$E = E_k = \frac{p^2}{2m} \quad (22-23)$$

于是由式 (22-21)，(22-22) 和 (22-23) 得一维运动自由粒子的波函数所遵循的偏微分方程为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (22-24)$$

这就是一维运动自由粒子的薛定谔方程。

如果粒子在一维势场中运动，它具有的势能函数为 $U(x, t)$ ，则粒子的总能量为：

$E = \frac{p^2}{2m} + U(x, t)$ ，于是在一维势场中运动的粒子的薛定谔方程可表示为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right] \Psi(x, t) \quad (22-25)$$

如果粒子在三维势场 $U(\mathbf{r}, t)$ 中运动，则可将薛定谔方程推广为更普遍的形式，即

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r},t) \right] \Psi(\mathbf{r},t) \quad (22-26a)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算符。若令 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r},t)$, 则上式可简写为

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r},t) \quad (22-26b)$$

式(22.26a)或式(22.26b)就是薛定谔方程的一般形式

应该指出, 薛定谔方程是非相对论量子力学的基本方程, 它在量子力学中的地位相当于牛顿运动定律在经典力学中的地位。此外, 描述微观粒子运动状态的波函数必须要满足薛定谔方程, 这又是量子力学中的 5 个基本假设之一。上述关于薛定谔方程的引入过程, 既不是证明过程, 也不是推导过程。正如同牛顿运动定律一样, 薛定谔方程是不能从更基本的理论中证明的, 它的正确性只能用实验来检验。自量子力学理论建立以来的大量实验事实表明, 薛定谔方程可以正确的解释或预言低速情况下各种势场中微观粒子的运动问题。

22.3.4 定态薛定谔方程

在许多实际问题中, 粒子是在恒定势场中运动, 势能函数 $U(\mathbf{r},t)$ 只是坐标的函数, 与时间无关, 即: $U(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r})$ 。在这种情况下, 通常可以把波函数分离成只含坐标函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 和只含时间函数 $f(t)$ 的乘积的形式, 即

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r}) f(t) \quad (22-27)$$

将其代入式(22-26)中, 两边再同时除以 $\Psi(\mathbf{r}) f(t)$, 并分离变量, 可得

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\Psi(\mathbf{r})} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (22-28)$$

不难发现, 等式左边只是时间的函数, 等式右边只是空间坐标的函数, 且空间变量与时间变量相互独立, 所以该等式成立的条件是等式两边必须等于同一个常量。又因为等式右边具有能量量纲, 所以该常量是一个能量值, 也就是微观粒子具有的总能量, 设为 E , 则有

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} = E$$

解此微分方程得

$$f(t) = c \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right)$$

式中, c 为积分常数, 将上式代入式(22-28), 则波函数可表示为

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) \quad (22-29)$$

式中， $\Psi(\mathbf{r})$ 包含了 $f(t)$ 中的常量 c 。由这种形式的波函数所描述的状态称为**定态** (stationary state)，这是因为，这种状态下，微观粒子的能量具有确定值 E 。这样的波函数称为**定态波函数**。此外，当微观粒子处于定态时，不仅粒子的能量具有确定值 E ，粒子在空间的概率密度分布也同样不随时间变化，这是因为 $p(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})\Psi^*(\mathbf{r})$ 与时间无关。

令式 (22-28) 的右边等于常量 E ，可得

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (22-30)$$

上式称为**定态薛定谔方程** (stationary Schrödinger equation)， $\Psi(\mathbf{r})$ 也称为**定态波函数**。

当微观粒子在一维恒定势能场 $U(x)$ 中运动时，其波函数所遵从的定态薛定谔方程简化为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (22-31)$$

这就是一维运动粒子的定态薛定谔方程。

§22.4 一维定态薛定谔方程的应用

用量子力学处理一维运动粒子的定态问题时所涉及的物理过程相对来说比较简单，数学上也比较容易处理，而且能得出较严格的结果，便于讨论和分析。本节将用薛定谔方程求解一维无限深势阱，一维势垒以及一维谐振子等具体的一维定态问题。从中可以了解量子力学处理微观运动粒子问题的一般方法，同时了解微观领域所特有的一些现象。

22.4.1 一维无限深势阱中的粒子

势阱 (potential well) 是研究微观粒子运动规律时常用的一个物理模型，因粒子在势场中的势能函数曲线的形状如同陷阱一样而得名。若粒子在势场中运动时的势能函数 $U(x)$ 具有下述形式

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \leq 0, x \geq a \end{cases} \quad (22-32)$$

则称为一维无限深势阱，势能函数曲线如图 22.6 所示。显然，这是一个理想化的物理模型。由于微观粒子的能量不可能达到无穷大，所以粒子只能在两个无限高的阱壁之间运动。用量子力学研究微观粒子在这种势场中的运动规律时，需要求解薛定谔方程。

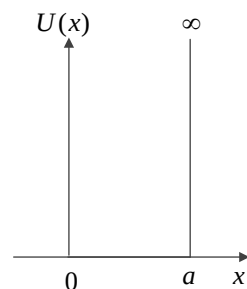


图22.6 一维无限深势阱

微视频22.1
一维无限深势阱
中的粒子

由式(22-32)可知，势能函数与时间无关，所以这属于一维定态问题，可用一维定态薛定谔方程(22-31)求解。

假设粒子的质量为 m ，则描述粒子运动状态的波函数在势阱内部 ($0 < x < a$) 遵从的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x)$$

这是一个二阶、线性、齐次、常系数微分方程。令 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ，可得其通解为

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \varphi) \quad (22-33)$$

式中 A ， φ 为待定系数。因为势阱壁无限高，从物理上考虑，粒子不可能穿过势阱壁，所以粒子在阱外出现的概率为零。再根据波函数的统计解释和波函数必须满足的标准条件（单值、有限、连续），可知：当 $x \leq 0$ 或 $x \geq 0$ 时

$$\Psi(x) = 0$$

利用波函数的边界条件，将 $\Psi(0) = 0$ 代入式 (22-33)，可得 $\varphi = 0$ ，因此波函数为

$$\Psi(x) = A \sin(kx)$$

再将 $\Psi(a) = 0$ 代入上式，可得 $A \sin(ka) = 0$ 。又因为 A 不可能为零，否则 $\Psi(x) \equiv 0$ ，无物理意义。所以有： $\sin(ka) = 0$ ，于是得

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad (22-34)$$

同样由于 $n=0$ 时， $\Psi(x) \equiv 0$ ，无物理意义，故上式中 n 应为正整数。因此，波函数为

$$\Psi(x) = A \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (22-35)$$

再由归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a} x dx = A^2 \cdot \frac{1}{2} a = 1$$

解得： $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ 。将它代入式 (22.35)，最后得到归一化定态波函数为

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x & (n=1, 2, 3, \dots) \quad 0 < x < a \\ 0 & x \leq 0, x \geq a \end{cases} \quad (22-36)$$

而粒子在势阱内的概率密度分布函数为

$$P(x) = |\Psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad 0 < x < a \quad (22-37)$$

下面，首先来讨论微观粒子在势阱中的能量特点。由 $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ 和 $k = \frac{n\pi}{a}$ ，可得

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (22-38)$$

式(22-38)的表明：当微观粒子被束缚在势阱中运动时，它的能量只能取一系列不连续的分立值，即它的能量是量子化的，整数 n 称为量子数。可见，在量子力学中，能量量子化是求解薛定谔方程的自然结果，不同于早期量子论中带有有人为假设的成分。

此外，当 $n=1$ 时，可得势阱中粒子能量的最小值 $E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$ ，这称为基态能量。势阱中微观粒子的基态能量（最小能量）不为零，这表明微观粒子在势阱内不可能静止不动。显然，这是微观粒子具有波动性的具体体现，因为不存在一个静止不动的波。这个结论也可以用海森伯不确定关系来解释。

另外，由式(22-38)可知，势阱中粒子的两个相邻的能级之差

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{(n+1)^2 h^2}{8ma^2} - \frac{n^2 h^2}{8ma^2} = (2n+1) \frac{h^2}{8ma^2}$$

当 n 一定， a 很大时， ΔE 很小。当 $a \rightarrow \infty$ 时， $\Delta E_n \rightarrow 0$ 。这表明，当势阱的宽度很大（达到宏观尺度）时，就回到了宏观中领域能量连续变化的经典情况。当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n} \rightarrow 0$ ，即当 n 很大时，能量可视为是连续的，同样也回到了经典物理的情形。

其次，来分析微观粒子在势阱内各处出现的概率分布。在图 22.7 中，画出了当量子数 $n=1,2,3,4$ 时，一维无限深势阱中粒子的能级、波函数和概率密度分布曲线。

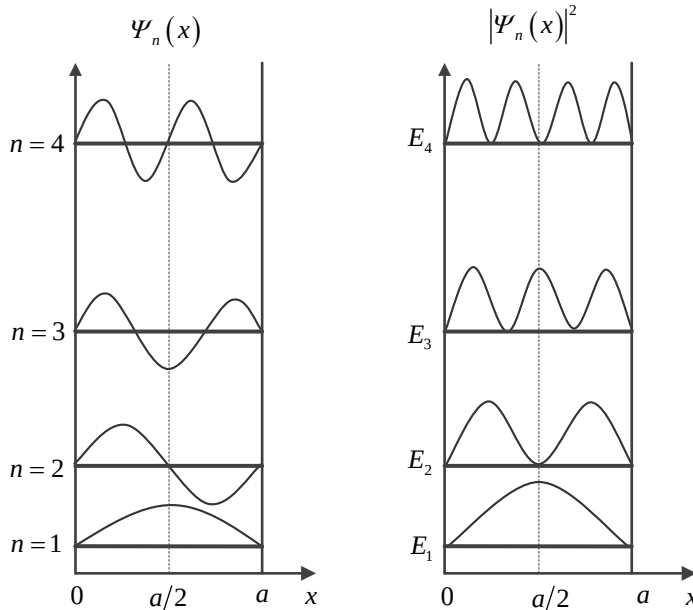


图22.7 一维无限深势阱中, 粒子的前四个能级及波函数和概率密度分布

从图中以及式 (22.37) 中, 可以看出微观粒子在势阱内出现的概率密度 $p(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)$ 随 x 变化, 即粒子在势阱内不同位置出现的概率不同。这与经典概念下的概率分布是完全不同的。按经典的观点, 粒子在势阱内各处出现的概率是处处相同的。此外, 从图中还可以看出粒子所处的状态不同 (即能级不同), 概率分布也不同, 而且随着量子数 n 的增加, 出现概率极大值的个数也在增加, 同时相邻两个极大值之间的间距在变小。显然, 当量子数 n 很大时, 概率的极大值将连成一片, 这时粒子在势阱内出现的概率密度处处相等, 与经典的结论趋于一致。

例 22.5 假设电子在一维无限深势阱中运动, 若势阱宽度分别为 $a = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 和 $a = 0.10 \text{ nm}$ 。试求: 两种情况下电子的相邻两个能级之差, 并作简单讨论。已知电子的质量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。

解: 由一维无限深势阱中粒子的相邻两个能级之差公式

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = (2n+1) \frac{h^2}{8ma^2}$$

当 $a = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 时, $\Delta E = (2n+1) \times 3.77 \times 10^{-15} \text{ eV}$

当 $a = 0.10 \text{ nm}$ 时, $\Delta E = (2n+1) \times 37.7 \text{ eV}$

数值计算表明, 当势阱的宽度达到宏观尺度时, 相邻两个能级的间隔小到可以忽略不计, 即电子的能量可看成是连续变化的。只有在微观尺度上, 电子的能量才明显呈现出量子性。所以能量量子化是微观世界特有的现象。

22.4.2 一维势垒 隧道效应 电子隧道显微镜

与势阱相对的另一种势能分布称为势垒 (potential barrier), 其中一维矩形势垒的势能函数曲线形状如图 22.8 所示, 其势能函数如下

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, x > a) \end{cases} \quad (23-39)$$

其中 $U_0 > 0$ 为一常量, 称为势垒高度。现有一个能量为 E 的粒子从势垒左方 (I 区) 向右运动。当粒子的能量 $E > U_0$ 时, 无论从经典理论还是量子理论来看, 粒子都可以穿过势垒区 (II 区) 到达 $x > a$ 的区域 (III 区)。量子理论中, 微观粒子在分界面处还有反射, 所以, 在 I 区有入射波和反射波; 在 II 区有透射波和反射波; 在 III 区只有透射波。若 $E < U_0$, 按照经典力学的观点, 粒子运动到势垒左边缘 $x = 0$ 处就会被反射回去, 不能穿过势垒; 但按照量子理论来分析, 粒子仍可以穿过势垒区运动到 III 区。事实证明, 后一种结论是正确的。

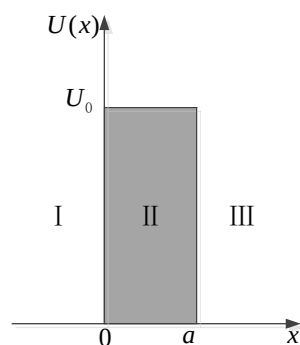


图22.8 一维方势垒

下面我们通过求解定态薛定谔方程来说明这个问题。

因 $U(x)$ 与时间无关，所以这是一维定态问题。一维定态薛定谔方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \Psi(x) = E\Psi(x)$$

在区域 I, $x < 0$, $U(x) = 0$, 设波函数为 $\Psi_1(x)$, 薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} = E\Psi_1(x)$$

在区域 II, $0 \leq x \leq a$, $U(x) = U_0$, 设波函数为 $\Psi_2(x)$, 薛定谔方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_0 \right] \Psi_2(x) = E\Psi_2(x)$$

在区域 III, $x > a$, $U(x) = 0$, 设波函数为 $\Psi_3(x)$, 薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_3(x)}{dx^2} = E\Psi_3(x)$$

考虑 $E < U_0$ 的情况, 令 $k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $k_2^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$, 并分别代入上述三个方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 \Psi_1(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi_2(x)}{dx^2} - k_2^2 \Psi_2(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi_3(x)}{dx^2} + k_1^2 \Psi_3(x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

求解上述三个方程, 得三个区域的通解分别为

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \\ \Psi_2(x) &= A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \\ \Psi_3(x) &= A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x} \end{aligned} \right\} \quad (22-40)$$

因为一维定态波函数 $\Psi(x, t) = \Psi(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right)$, 所以上式 $\Psi_1(x)$ 和 $\Psi_3(x)$ 中的第一项均表示沿 x 轴正向传播的波, 第二项表示沿 x 轴负向传播的波。考虑到粒子是从 I 区入射, 在 I 区中即有入射波, 又有反射波; 粒子从 I 区穿过 II 区 (势垒区) 到 III 区, 在 III 区只有透射波, 于是有 $B_3 = 0$ 。由于定态薛定谔方程是一个关于空间坐标的 2 阶微分方程, 所以要求波函数对空间坐标的一阶导数存在且连续, 再加上波函数的标准条件, 可知: 在 $x = 0$ 和 $x = a$ 处必有

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(0) = \Psi_2(0) \quad , \quad \frac{d\Psi_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= \frac{d\Psi_2(x)}{dx} \Big|_{x=0} \\ \Psi_2(a) = \Psi_3(a) \quad , \quad \frac{d\Psi_2(x)}{dx} \Big|_{x=a} &= \frac{d\Psi_3(x)}{dx} \Big|_{x=a} \end{aligned} \right\} \quad (22-41)$$

假设入射波的振幅 A_1 为已知，即可从式 (22-41) 中求出常数 B_1 、 A_2 、 B_2 、 A_3 和 A_1 之间的关系，从而得到粒子在这三个区域中的波函数。图 22.9 给出了粒子在三个区域中的波函数曲线。

显然，在势垒区和 III 区，波函数不为零。这说明在粒子的总能量 $E < U_0$ 的情况下，粒子仍然有一定的概率穿透势垒到达 III 区，并且，穿越势垒后粒子的能量没有减少。这种现象对于宏观物体来说是不可能出现的。人们将**微观粒子能够穿透比其总能量更高的势垒的现象称为隧道效应 (tunnel effect)**。隧道效应本质上源于微观粒子的波粒二像性。

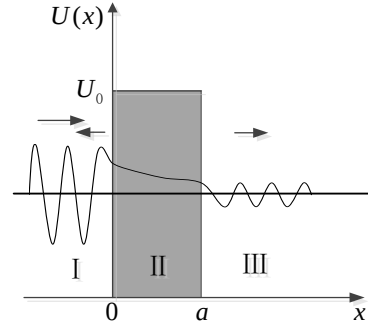


图22.9 隧道效应

为了描述微观粒子透过势垒的概率，可以引入一个参数——称为**透射系数**，用 T 表示。它定义为 $x = a$ 处透射波的强度 A_3^2 和 $x = 0$ 处入射波的强度 A_1^2 之比。经计算可得，对于低能粒子入射情况（即不考虑相对论效应时），有

$$T = \frac{A_3^2}{A_1^2} \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right) \exp \left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right) \quad (22-42)$$

数值计算表明，透射系数与势垒的宽度 a 、能量差 $(U_0 - E)$ 以及粒子的质量 m 的关系很敏感。随着势垒的加宽或加高，或粒子的质量的增加，透射系数按指数规律迅速减小。因此，在宏观领域观察不到隧道效应。例如当电子的能量为 1eV ，势垒的高度为 2eV ，宽度为 $2 \times 10^{-10}\text{m}$ 时，电子的透射系数为 0.51 ；而当势垒宽度增加到 $5 \times 10^{-10}\text{m}$ ，电子的透射系数迅速下降为 0.024 ；对于质子，当能量同样为 1eV ，势垒的高度和宽度仍然分别为 2eV ，和 $2 \times 10^{-10}\text{m}$ 时，质子的透射系数仅为 3×10^{-38} 。

微观粒子的隧道效应现象已被许多实验所证实。例如原子核的 α 衰变，电子的场致发射，半导体中的隧道二极管，超导体中的隧道结等，都是隧道效应的结果。1957 年，江崎制成了隧道二极管，第一次令人信服地证实了固体中的电子隧道效应的存在。1981 年，宾尼希 (G Binning 德国) 和罗雷尔 (H Rohrer 瑞士) 利用电子的隧道效应，发明了扫描隧道显微镜 (STM)，把隧道效应的应用推向一个新的阶段。两人因此与发明电子显微镜的卢斯卡一起分享了 1986 年诺贝尔物理学奖。

STM (Scanning tunneling microscopy) 是一种基于隧道效应的设备，它能够提供被观测物表面结构的详细而清晰的三维图像，目前其横向分辨率已达到 0.1nm ，纵向分辨率达到 0.01nm ，优于电子显微镜的分辨本领。

STM 的工作原理如图 22.10 所示。金属的表面处存在着势垒，阻止内部的电子向外逸出，但由于电子的隧道效应，金属中的电子并不完全局限于表面边界之内，电子密度并不在表面边界处突变为零，而是在表面以外呈指数形式衰减，衰减长度约为 1nm 。只要将原子线度的极细探针以及被研究物质的表面作为两个电极，当样品与针尖的距离非常接近时，它们的表面电子云就可能重叠。若在样品与针尖之间加一微小电压 U_b ，电子就会穿过电极间的势垒形成隧道电流。因为隧道电流对针尖与样品间的距离十分敏感。若控制隧道电流不变，则探针在垂直于样品方向上的高度变化就能反映样品表面的起伏。若控制针尖高度不变，通过隧道电流的变化可得到表面电子态密度的分布。

STM 使人类第一次能够实时地观察单个原子在物质表面的排列状态和与表面电子行为有关的物化性质，并可对单个原子和分子进行移动和操纵，在表面科学、材料科学、生命科学等领域的研究中有着重大的意义和广泛的应用前景，被国际科学界公认为 20 世纪 80 年代世界十大科技成就之一。

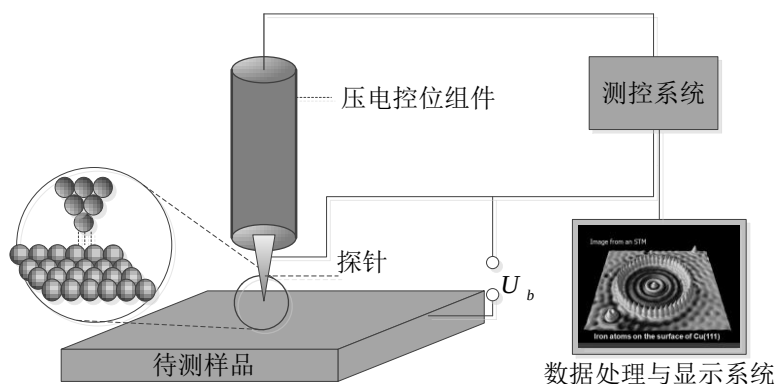


图22.10 扫描隧道显微镜结构与工作原理示意图

22.4.3 一维谐振子

谐振子也是一个重要的物理模型，在微观领域中分子的振动，晶格的振动，原子核表面的振动等都可以近似地用谐振子模型来描述。

设质量为 m 的粒子在一维空间中运动，如果其势能函数可表示为

$$U(x) = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (22-43)$$

其中 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 是一常量， x 为粒子离开平衡位置的位移，则这种体系称为一维谐振子。因一维谐振子的势能函数与时间无关，故属于定态问题，其定态薛定谔方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (22-44)$$

这是一个变系数二阶常微分方程，可解。但其求解过程相当复杂，这里不作详细推算，

仅给出有关结果。

根据波函数必须满足的标准条件和归一化条件，可以得到一维谐振子的波函数为

$$\Psi_n(x) = A_n e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(\sqrt{m\omega/\hbar} \cdot x) \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (22-45)$$

式中 $H_n(\sqrt{m\omega/\hbar} \cdot x)$ 称为厄米多项式， n 称为量子数。

各量子态下谐振子的能量为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (22-46)$$

可见，谐振子能级只能取分立值，是量子化的。谐振子能级如图 22.11 所示。相邻能级间隔相等均为

$E_{n+1} - E_n = \hbar \omega = h\nu$ 。这一点与普朗克的能量子假设是一致的，但在这里它是通过求解薛定谔方程得到的，不需要人为假定。另外谐振子的基态（ $n=0$ 时）的能量为：

$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$ ，这称为**谐振子的零点能**。零点能的存在是量子力学的一个重要结果，也是微观粒子波动性的本质表现。零点能的存在已为光的散射实验所证实。

图 22.12 是一维谐振子的前几个能态的波函数曲线和对应的概率分布曲线。

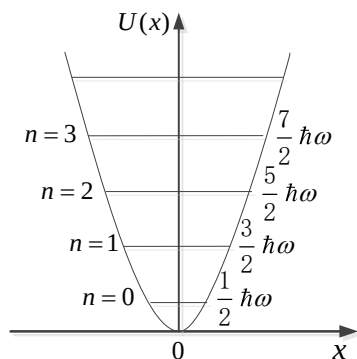


图22.11 一维谐振子的能级

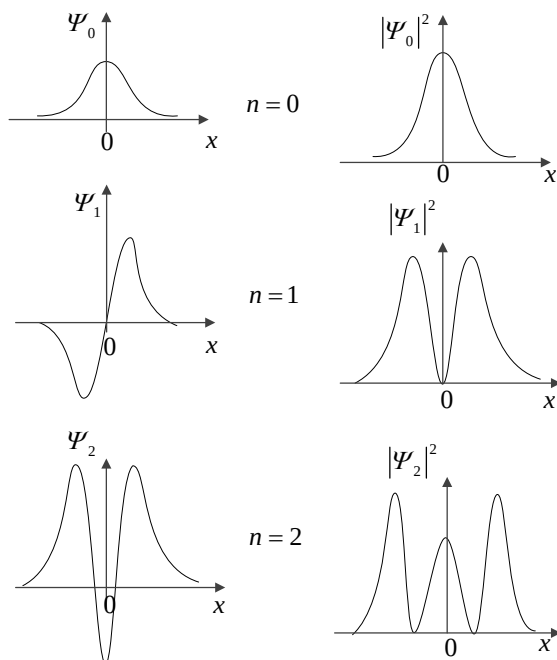


图22.12 (a) 线性谐振子波函数 (b) 线性谐振子概率密度分布

图 22.13 是谐振子处于 $n=11$ 的激发态的概率分布曲线。按经典理论，谐振子在坐标原点（平衡位置）处速度最大，停留时间最短，粒子出现的概率最小；在两端速度为零，粒子出现的概率最大，如图 22.13 中虚线所示。这显然与量子力学中的概率分布曲线（图中实线所示）不符。不过，从概率分布曲线可以看出，随着量子数 n 的增大，谐振子的概率密度分布迅速震荡，其平均值与经典结果趋于一致。经典与量子的相似性逐渐增大。当 $n \rightarrow \infty$ 时，量子力学中的概率分布将会过渡到经典力学中的概率分布。

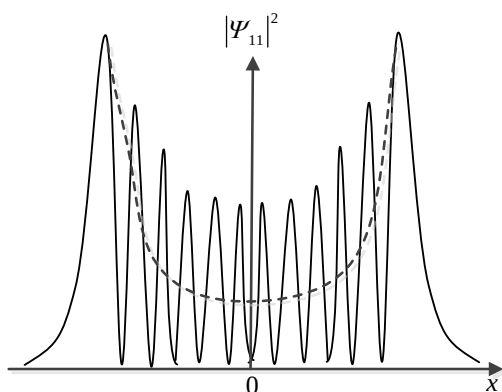


图22.13 线性谐振子 $n=11$ 时的概率密度分布

思考题

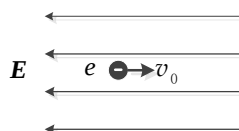
文档22.5
第22章思考题,习题答案

- 22.1 假设一个电子和一个质子具有相同的动能，哪一个的德布罗意波长更长？
- 22.2 试述不确定关系的起源，它是由于测量误差造成的吗？
- 22.3 以下说法是否正确：
- (1) 量子力学适用于微观体系，而经典力学适用于宏观体系；
 - (2) 量子力学适用于 $\hbar$ 不能忽略的体系，而经典力学适用于 $\hbar$ 可以忽略的体系。
- 22.4 经典波和量子力学中的物质波有什么本质区别？
- 22.5 设 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 为描述微观粒子运动状态的波函数，则 $\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ 表示什么？ $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 必须满足那些条件？
- 22.6 何谓定态？它有何特征？
- 22.7 粒子在一维无限深势阱中，当 $n=3$ 时，波函数在阱中有两处为零，因而在这两点发现粒子的概率也为零，那么粒子怎么通过这两点而运动呢？
- 22.8 什么是隧道效应？在怎样的情况下，隧道效应就不明显了？
- 22.9 在一维势垒中，是否当入射粒子的能量小于势垒的高度时会发生反射，而当入射粒子能量大于势垒的高度时不会发生反射？
- 22.10 量子力学理论给出的一维谐振子的能量有什么特别之处？什么是零点能？零点能不等于零说明了什么？

习 题

本章习题中的几个常用物理常量：普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ；电子电量 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ；电子的静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

22.11 如图所示，一电子以初速度 $v_0 = 6.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ 逆着场强方向飞入电场强度为 $E = 500 \text{ V/m}$ 的均匀电场中，问该电子在电场中要飞行多长距离 d ，可使得电子的德布罗意波长达到 $\lambda = 0.10 \text{ nm}$ 。（设飞行过程中，电子的质量保持不变，即不考虑相对论效应）



题 22.11 图

22.12 一质量为 40 g 的子弹以 $1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率飞行，试求：

- (1) 其德布罗意波的波长；
- (2) 若在某一时刻同时测定子弹的位置坐标和速度时，测得子弹位置的不确定量为 0.10 mm ，试由不确定关系求其速度的不确定量。

22.13 一电子束中，电子的速率为 $8.4 \times 10^6 \text{ m/s}$ ，试求电子的德布罗意波长。

22.14 已知第一玻尔轨道半径为 r_1 ，试计算当氢原子中的电子沿第 n 个玻尔轨道运动时，其相应的德布罗意波长是多少？

22.15 一单色光的波长为 $\lambda = 300 \text{ nm}$ ，实验测得该单色光的相对谱线宽度为 $\Delta\lambda / \lambda = 10^{-6}$ ，试根据位置与动量的不确定关系，求此光子位置的不确定量（注：此不确定量也可理解为该单色光中一个波列的长度或相干长度）。

22.16 原子内电子处于某个激发态能级的平均寿命为 10^{-10} s 。

- (1) 计算该激发态的能级宽度；
- (2) 假设该激发态与基态的能级间隔为 $\Delta E_{n,1} = 3.39 \text{ eV}$ ，试求当电子从该激发态向基态跃迁时所发出的光谱线的波长 λ 及该谱线的宽度 $\Delta\lambda$ 。

22.17 设粒子在一维空间中运动，描述其运动状态的波函数为：

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0 & \left(x < -\frac{b}{2}, x > \frac{b}{2} \right) \\ A \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) & \left(-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \right) \end{cases}$$

其中， A 为任意常数（待求）， E ， b 均为大于零的常数，试求

- (1) 归一化的波函数；
- (2) 概率密度分布函数；
- (3) 什么地方出现粒子的概率最大？

22.18 已知粒子处于宽度为 a 的一维无限深方势阱中运动的波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

试计算：当 $n=1$ 时，在 $x_1 = a/4 \rightarrow x_2 = 3a/4$ 区间内找到粒子的概率。

22.19 一维运动的粒子，其定态波函数为：

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A x e^{-\lambda x} e^{-i \frac{E}{\hbar} t} & x \geq 0 \end{cases}$$

式中 A 、 λ 为常数，且 $\lambda > 0$ 。试求：

- (1) 归一化的定态波函数；（提示： $\int_0^\infty y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3}$ ）
- (2) 粒子出现的概率为最大的位置。

22.20 一维线性谐振子处于第一激发态时的定态波函数为：

$$\Psi_1(x, t) = A x \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2}\right) e^{-i \frac{E}{\hbar} t},$$

其中 A 为归一化常数， α 为一常量。试求谐振子出现概率最大的位置。

第 22 章 思考题与习题答案

思考题答案

22.1 答：不论在非相对论中： $p^2 = 2m_0 E_k$ ，还是在相对论中： $p^2 = 2m_0 E_k + E_k^2/c^2$ ，均有动能相等时，质量越小，动量越小。所以具有相同动能的电子和质子，电子的动量小于质子的动量，再由德布罗意关系可知，电子的德布罗意波长更长。

22.2 答：不确定关系源于微观粒子的波粒二象性，是粒子具有波动性的直接体现。不确定关系给出了在同时测定微观粒子的坐标和相应方向上的动量时，测量不确定度必须满足的条件。该条件与测量仪器的精度及测量方法是否完备无关。无论怎样提高测量仪器的精度和改善测量方法，都不可能逾越不确定关系所给出的条件。

22.3 答：(1) 量子力学是比经典力学更为普遍的理论体系，它可以包容整个经典力学体系。(2) 对于宏观体系或 $\hbar$ 可以忽略的体系，并非量子力学不能适用，而是量子力学实际上已经过渡到经典力学，二者相吻合了。

22.4 答：这种区别可以从波函数本身和波的强度两个方面来说明。(1) 关于波函数：经典波的波函数描述了某个物理量（如机械波中粒子的振动状态）在空间的传播过程；而物质波的波函数描述了微观粒子的运动状态，波函数本身不代表任何一个具体的物理量，也不代表任何物理量的传播过程。(2) 关于波的强度：经典波的强度（波函数的模的平方）表示了这种波的能量流密度。所以波的振幅增大一倍，波的强度（即能量流密度）变为原来的四倍，这实际上变成了另外一个波；而量子力学中波的强度正比于微观粒子在空间出现的概率，这种概率分布只决定于波函数在空间各点的相对强度。概率波的振幅增大一倍不影响粒子在空间出现的概率分布。即将波函数乘上一个任意常数，它所描述的微观粒子的运动状态并不改变。

22.5 答： $\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ 是波函数的强度，它与微观粒子在 t 时刻，空间 $\mathbf{r}$ 处单位体积内出现的概率成正比，当 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 满足归一化条件时， $\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ 表示了微观粒子在空间出现的概率密度分布；根据波恩的统计解释， $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 须满足标准条件（即：单值、连续、有限）和归一化条件（即 $\iiint_V \Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t) dV = 1$ ）。

22.6 答：定态是指：粒子所处的势能场恒定，不随时间变化，即 $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})$ 时，粒子所处的状态。定态具有以下特征：(1) 定态波函数的时空坐标可以分离，即： $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right)$ ；(2) 粒子的能量 E 具有确定的值，不随时间变化；3、粒子在空间各处出现的概率分布不随时间变化；4、不显含时间 t 的力学量取各种可能值的概率及力学量的平均值都不随时间变化。

22.7 答：微观粒子在势阱中的运动不能看成是经典粒子在势阱中的来回移动，而是一种波动过程。正是波动在势阱壁上的往复反射，干涉后形成了驻波，产生了波腹与波节，波节处波函数为零，发现粒子的概率为零。因此波节是粒子运动的产物，而不是阻碍粒子在势阱的运动。

22.8 答：隧道效应是由微观粒子波动性所产生的一种量子效应，是指微观粒子有一定的概率穿过势垒高度大于其动能的势垒区的现象。隧道效应显著与否决定于势垒高度，宽度及粒子质量的大小。势垒高度越高，宽度越大，粒子质量越大隧道效应越不明显。理论计算表明，对于能量为几个电子伏的电子，势垒的能量也是几个电子伏，当势垒宽度为 0.1nm 时，电子的透射概率达零点几；而当势垒宽度为

1nm 时, 电子透射概率减小到 10^{-10} , 已非常不明显了。

22.9 答: 无论入射粒子能量大于势垒高度或小于势垒高度, 都会发生反射。

22.10 答: 量子力学理论给出的一维谐振子的能量公式为: $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$, 式中 $n = 0, 1, 2, \dots$, ν 是谐振子的振动频率。其能量特点有: (1) 谐振子的能量是量子化的; (2) 相邻两个能级的能级间隔为 $\Delta E = h\nu$; (3) 谐振子的基态能量 (即最小能量) $E_0 = \frac{1}{2}h\nu$ 不为零。零点能就是谐振子的最小能量。零点能不等于零表明谐振子不可能静止不动。显然用经典概念这是无法解释的, 所以它是量子力学的一个重要结果, 是微观粒子具有波动性的本质表现。

习题答案

22.11 $d = 9.68 \text{ cm}$

22.12 $\lambda = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$, $\Delta\nu = 1.66 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

22.13 $\lambda = 8.67 \times 10^{-2} \text{ nm}$

22.14 $\lambda = 2\pi r_1 n$

22.15 $\Delta x \geq 24 \text{ nm}$

22.16 $\Delta E \geq 3.30 \times 10^{-6} \text{ eV}$; $\lambda = 3.67 \times 10^{-7} \text{ m}$, $\Delta\lambda = 3.57 \times 10^{-13} \text{ m}$

22.17 $\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{b}} \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) \quad \left(-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}\right);$

$$w(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \begin{cases} 0 & \left(x < -\frac{b}{2}, x > \frac{b}{2}\right) \\ \frac{2}{b} \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) & \left(-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}\right) \end{cases}; \quad x=0$$

22.18 0.818

22.19 $\Psi(x, t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{4\lambda^3} x e^{-\lambda x} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} & x \geq 0 \end{cases}; \quad x = 1/\lambda$

22.20 $x = \pm \frac{1}{\alpha}$

第 23 章 原子和固体的量子理论

第二十三章
PPT课件下载

在前两章中，我们分别介绍了早期量子论和量子力学基础，对量子力学的建立和量子力学处理微观粒子运动问题的一般方法有了初步了解，为进一步探索原子和固体的结构及运动规律奠定了基础。

本章我们将首先介绍氢原子的量子力学理论，再介绍电子的自旋概念和多电子原子的壳层结构，然后介绍固体的能带结构及导体、绝缘体和半导体的概念，最后简单介绍半导体器件和激光及其应用。

§23.1 氢原子的量子理论

氢原子的玻尔理论是半经典半量子化的理论，它只能解释氢原子以及类氢离子的光谱规律，无法解释比氢原子更复杂的原子（如氢原子和碱土金属原子）的光谱规律；也无法解释光谱线的精细结构、强度、偏振等问题。只有在微观粒子波粒二象性基础上建立起来的量子力学，才能对原子问题作出比较完满的论述。本节主要介绍在量子力学中是如何处理氢原子问题的。由于求解氢原子薛定谔方程的数学运算比较复杂，超出了本课程的教学要求，所以这里只简单地说明其求解的思路和方法，并讨论相关的重要结论。

23.1.1 氢原子的薛定谔方程

在氢原子中，由于原子核的质量远大于核外电子的质量，为简便起见，可认为核是静止的，电子在核的库仑场中运动。当电子与核的距离为 r 时，电子的电势能为

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (23.1)$$

显然，该势能函数与时间无关，所以属于定态问题。将 $U(r)$ 代入定态薛定谔方程，可得

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0 \quad (23.2)$$

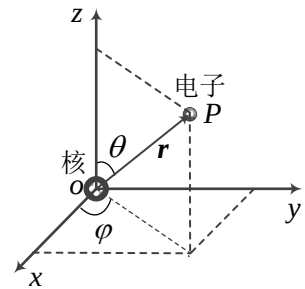


图23.1 球坐标与直角坐标

由于势能函数 $U(r)$ 仅为 r 的函数，是球对称的，为了方便求解，可采用球坐标 (r, θ, φ) 代替直角坐标 (x, y, z) ，如图 23.1 所示，两组坐标之间的变换关系为

$$x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

将上述变换关系代入式 (23.2)，则薛定谔方程可写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0 \quad (23.3)$$

因为势能函数仅为 r 的函数，且波函数 Ψ 是 r ， θ 和 φ 的单值函数，所以波函数 Ψ 可以写成

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

式中 $R(r)$ 、 $\Theta(\theta)$ 和 $\Phi(\varphi)$ 分别只是 r, θ, φ 的函数。将上式代入式 (23.3)，并用

$R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 除全式，再乘以 $r^2 \sin^2 \theta$ ，并分离变量，化简后得

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \sin^2 \theta \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

由于该等式的左边只有变量 r 和 θ ，右边只有变量 φ ，所以上式恒等的条件是等式两边均等于一个相同的常数。设此常数为 m_l^2 ，则有

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \sin^2 \theta \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = m_l^2 \quad (23.4)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m_l^2 \quad (23.5)$$

其中，式 (23.4) 还可以进一步分离变量，写成

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)$$

上式等号左边仅为 r 的函数，右边仅为 θ 的函数，故上式恒等的条件同样是等式两边均等于一个相同的常数。设此常数为 $l(l+1)$ ，则有

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} r^2 \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = l(l+1) \quad (23.6)$$

$$\frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad (23.7)$$

求解方程 (23.6)，(23.7) 和 (23.5)，并考虑到波函数应满足的标准条件，即可得到描述核外电子运动状态的波函数 $\Psi(r, \theta, \varphi)$ 。

23.1.2 量子化条件和量子数

在求解上述三个方程 (23.6)，(23.7) 和 (23.5) 时，为了使波函数能够满足标准条件，即单值、连续、有限，可以很自然地得出氢原子的一些量子化特性。

1. 能量量子化和主量子数

在求解氢原子波函数的径向部分方程式 (23.6) 时，为了使径向波函数 $R(r)$ 满足标准条件，氢原子的能量必须满足量子化条件，即

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.8)$$

式中 n 称为主量子数 (principal quantum number), n 的取值决定了氢原子的能级。这个结果与玻尔理论的结果完全一致, 但玻尔在推出上述结果时人为地引入了角动量子化条件; 而在量子力学中, 上述结果是在求解薛定谔方程的过程中自然地得出的。

2. 角动量子化和角量子数

在求解氢原子波函数的径向部分方程式 (23.6) 和角函数部分方程式 (23.7) 时, 为使径向和角向波函数都能满足标准条件, 可得氢原子中电子绕核运动的轨道角动量 $\mathbf{L}$ 的大小为

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (23.9)$$

式中 l 称为轨道角量子数, 简称角量子数 (angular quantum number)。由 l 的取值规则可知, 当主量子数 n 给定时, 角量子数 l 和轨道角动量 $\mathbf{L}$ 的大小均有 n 个不同的取值。例如: 当 $n=1$ 时, $l=0$, $L=0$; 当 $n=2$ 时, 角量子数 l 可取 0 或 1, 相应的角动量 $\mathbf{L}$ 的大小可取 0 或 $\sqrt{2}\hbar$ 。由此可见, 由量子力学理论得出的氢原子中电子绕核运动的角动量也是量子化的, 但和玻尔理论不同的是, 电子的轨道角动量并不是 $\hbar$ 的整数倍, 最小值也不为 $\hbar$, 而是为零。实验表明, 量子力学的结果是正确的。

3. 角动量空间量子化和磁量子数

在求解氢原子波函数的角函数方程式 (23.5) 时, 可得氢原子中电子绕核运动的轨道角动量 $\mathbf{L}$ 在空间给定方向 (如 z 轴) 上的分量 (或投影) 的大小不能连续地改变, 只能取一些不连续的、分立的值, 即

$$L_z = m_l \hbar, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (23.10)$$

这称为角动量空间取向的量子化。式中 m_l 称为轨道磁量子数, 简称磁量子数 (magnetic quantum number), 这是因为 z 轴通常与磁场有关。对于一个给定的角量子数 l , 磁量子数 m_l 只可取 $2l+1$ 个不同的值, 从而 L_z 也只能有 $2l+1$ 个不同的取值。这表明角动量在空间的取向只有 $2l+1$ 种可能。图 23.2 绘出了当 $l=1$ 和 $l=2$ 时, 电子的轨道角动量空间取向量子化的示意图。

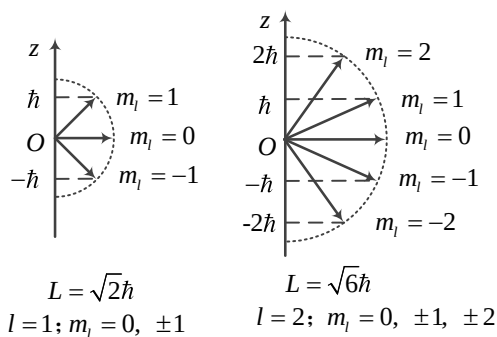


图23.2 角动量空间取向的量子化

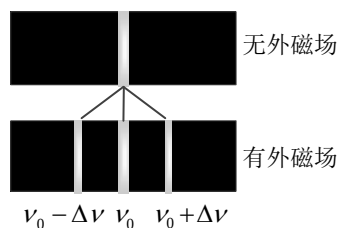


图23.3 正常塞曼效应示意图

1896 年, 荷兰物理学家塞曼 (P. Zeeman) 发现在强磁场中的光源所发出的光谱线会发生分裂, 这一现象称为塞曼效应 (Zeeman effect)。例如, 波长为 422.673nm 的钙光谱

线，在磁场中会分裂为间距相等的 3 条谱线，其波长分别为 422.656nm，422.673nm 和 422.690nm，其示意图如图 23.3 所示。人们将在磁场中的光源发出的一条光谱线分裂成 3 条的现象称为**正常塞曼效应**。如水银，锌，镉等元素都有正常塞曼效应。著名物理学家 H. A. 洛伦兹曾经用经典电磁理论对该现象进行了解释。他认为，由于电子存在轨道磁矩，并且磁矩在空间的取向是量子化的，因此在磁场的作用下，电子获得附加能量，并使原子能级发生分裂，从而使原子发出的光谱线在磁场中分裂成间隔相等的 3 条谱线。塞曼和洛伦兹因这一发现共同获得了 1902 年的诺贝尔物理学奖。所以塞曼效应从实验上证明了角动量空间取向量子化的存在。



塞曼

然而，大多数元素在弱磁场中谱线分裂的数目不是 3 条，分裂后的谱线间距也各不相同。例如，钠原子的 589.6nm 和 589.0nm 两条光谱线在弱磁场中分别分裂为四条和六条谱线，这种现象称为**反常塞曼效应** (anomalous Zeeman effect)。实验发现，反常塞曼效应无法用轨道角动量空间取向量子化的观点进行解释。直到 1926 年海森伯考虑了电子自旋后，才用量子力学理论对反常塞曼效应给出了正确解释。

23.1.3 电子的概率密度分布

根据波尔的氢原子模型，电子绕原子核作轨道运动。但根据量子力学理论中的不确定关系和玻恩的统计解释，核外电子的运动不存在确定的轨道。通过求解薛定谔方程可以得到描述电子运动状态的波函数 $\Psi(r, \theta, \varphi)$ ，从而可以得到电子在原子核周围运动时，在空间各处出现的概率分布。

由于波函数 $\Psi(r, \theta, \varphi)$ 的具体形式取决于量子数 (n, l, m_l) 的取值，因此一组量子数 (n, l, m_l) 的可能取值就表示了氢原子核外电子所处的一个可能状态，其对应的波函数为

$$\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \Theta_{lm_l}(\theta) \Phi_{m_l}(\varphi) \quad (23.11)$$

当氢原子处于 $\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)$ 态时，电子出现在原子核周围的概率密度分布函数为

$$|\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)|^2 = |R_{nl}(r) \cdot \Theta_{lm_l}(\theta) \cdot \Phi_{m_l}(\varphi)|^2 \quad (23.12)$$

电子出现在在空间 (r, θ, φ) 点周围 $r \rightarrow r + dr, \theta \rightarrow \theta + d\theta, \varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$ 的体积元

$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = r^2 dr d\Omega$ 内的概率是

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 dV &= |R_{nl}(r)|^2 \cdot |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \cdot |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \cdot |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \cdot |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\varphi \\ &= |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \cdot |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \cdot |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (23.13)$$

式中 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 是沿 (θ, φ) 方向的立体角元。由于电子在原子核外整个空间内出现的概率为 1，由归一化条件，可得

$$\int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \cdot \int_0^\pi |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\varphi = 1$$

上式中对径向的积分等于 1，同时对两个角量的积分也分别等于 1。

表 23.1 列出了几组量子数下波函数的具体表达式。表中 r_1 为玻尔理论中氢原子的第一轨道半径。

表 23.1 氢原子的部分定态波函数

n	l	m_l	$R_{nl}(r)$	$\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\varphi)$
1	0	0	$\frac{2}{r_1^{3/2}} e^{-r/r_1}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}r_1^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) e^{-r/2r_1}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{6}r_1^{3/2}} \frac{r}{r_1} e^{-r/2r_1}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
	1	± 1	$\frac{1}{2\sqrt{6}r_1^{3/2}} \frac{r}{r_1} e^{-r/2r_1}$	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}r_1^{3/2}} \left(1 - \frac{2r}{3r_1} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right) e^{-r/3r_1}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
	1	0	$\frac{8}{27\sqrt{6}r_1^{3/2}} \frac{r}{r_1} \left(1 - \frac{r}{6r_1}\right) e^{-r/3r_1}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
	1	± 1	$\frac{8}{27\sqrt{6}r_1^{3/2}} \frac{r}{r_1} \left(1 - \frac{r}{6r_1}\right) e^{-r/3r_1}$	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$
	2	0	$\frac{4}{81\sqrt{30}r_1^{3/2}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 e^{-r/3r_1}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$
	2	± 1	$\frac{4}{81\sqrt{30}r_1^{3/2}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 e^{-r/3r_1}$	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{\pm i\varphi}$
	2	± 2	$\frac{4}{81\sqrt{30}r_1^{3/2}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 e^{-r/3r_1}$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$

1、径向概率密度分布

由式 (23.13) 可知，电子出现在半径 r 到 $r + dr$ 薄球壳内的概率为

$$\int_0^\pi |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\varphi R_{nl}^2(r) r^2 dr = |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr$$

此式表明电子在一个薄球壳内出现的概率随球壳的半径 r 的变化而变化，其中 $R_{nl}^2(r)r^2$ 称为**径向概率密度分布函数** (Radial probability density distribution function)，用 $P_{nl}(r)$ 表示，即

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2 \quad (23.14)$$

图 23.4 和图 23.5 分别给出了氢原子的几个量子态所对应的电子径向概率密度分布曲线及其剖面示意图。从图中可以看出，主量子数 n 不同的状态，电子的概率分布不同；主量子数 n 相同，但角量子数 l 不同的状态，电子的概率分布也是不同的。对于同一主量子数 n ， l 取最大值所对应的状态，电子的径向概率密度分布都只有一个峰值，即电子沿径向出现概率最大的位置只有一个。例如，当

氢原子处于基态时 ($n=1, l=0$)，峰值位置为 $r=r_1$ ，即电子出现在波尔半径 r_1 附近的概率最大；当 $n=2, l=1$ 时，峰值位置为 $r=4r_1$ ；对于其它主量子数 n ， l 取最大值所对应的状态，也有相同的规律，即峰值位置均为 $r_n = n^2 r_1$ 。显然，这与波尔理论是一致的，即这些位置正好是波尔的氢原子理论中核外电子轨道的位置。但是按照波尔理论，电子只能严格地在这些轨道上运动。而量子力学却指出：电子在这些轨道附近出现的概率最大，但也可能出现在别的位置。所以在量子力学中“轨道”概念是不存在的，特别是当角量子数 $l=0$ ，角动量 $L=0$ 时，就没有经典运动图像与之对应。

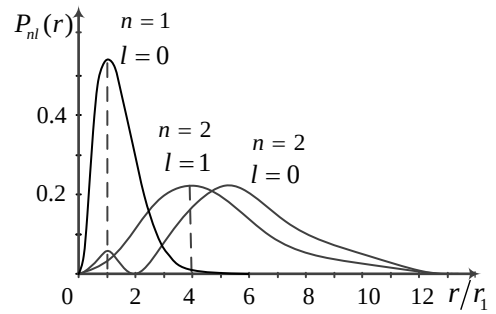


图23.4 氢原子中电子沿径向出现的概率密度分布曲线

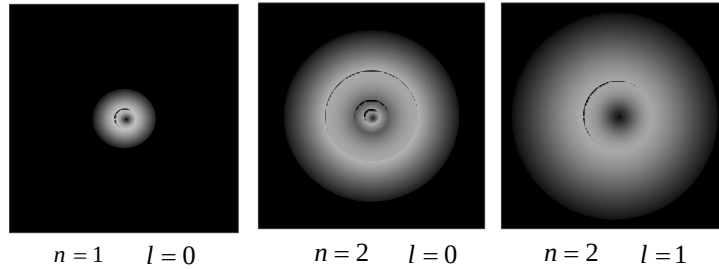


图23.5 氢原子中电子沿径向出现的概率密度分布剖面示意图

2、角向概率密度分布

由式 (23.13) 可知，电子出现在 (θ, φ) 方向立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ 内的概率为

$$\int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \cdot |\Theta_{lm_l}(\theta)|^2 \cdot |\Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\Omega = |\Theta_{lm_l}(\theta) \cdot \Phi_{m_l}(\varphi)|^2 d\Omega$$

我们将 $|\Theta_{lm_l}(\theta) \cdot \Phi_{m_l}(\varphi)|^2$ 称为角向概率密度分布函数 (Angular probability density distribution function), 并用 $P_{lm_l}(\theta, \varphi)$ 表示, 即

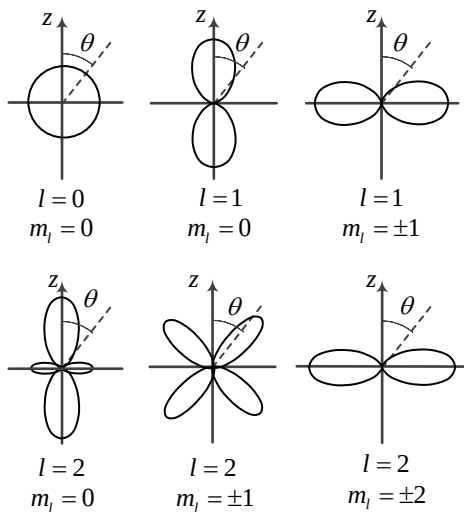


图23.6 氢原子中电子的角向概率密度分布示意图

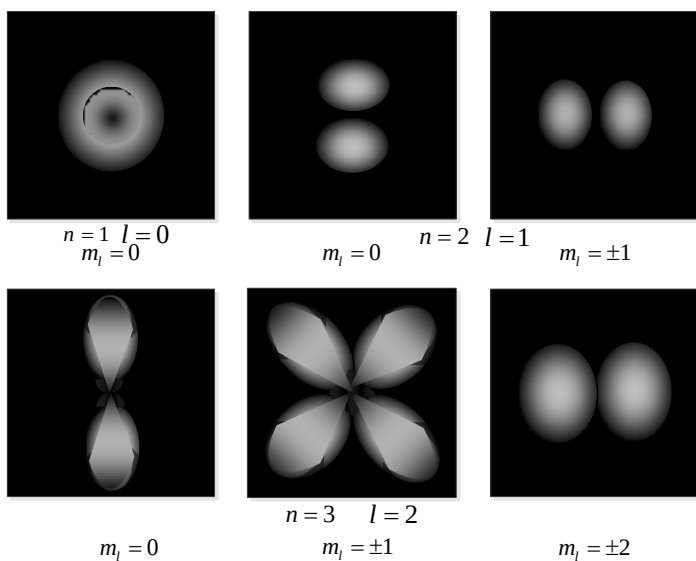


图23.7 氢原子的几个量子态下的电子云图

$$P_{lm_l}(\theta, \varphi) = |\Theta_{lm_l}(\theta) \cdot \Phi_{m_l}(\varphi)|^2 \quad (23.15)$$

它表示电子出现在 (θ, φ) 方向单位立体角内的概率。由于在求解方程式 (23.5) 时，得出 $|\Phi_{m_l}(\varphi)|^2$ 是常数，这表明电子的概率分布与 φ 无关，只与 θ 有关，因此电子的角向概率密度分布函数 $P_{m_l}(\theta, \varphi)$ 具有对 z 轴的旋转对称性。图 23.6 给出了氢原子的几个量子态所对应的电子角向概率密度分布曲线。图中从原点引向曲线某点的距离，代表了电子出现在该方向上单位立体角内概率的大小。

为了形象地表示电子在空间的概率分布规律，通常将概率大的位置用浓影，概率小的位置用淡影表示出来，称为**电子云图** (electron cloud)。图 23.7 给出了氢原子的几个量子态所对应的电子在含 z 轴的剖面上的电子云示意图。

§23.2 电子自旋

23.2.1 斯特恩—格拉赫实验

施特恩-格拉赫实验是德国物理学家施特恩 (O. Stern) 和格拉赫 (W. Gerlach) 为证实原子角动量空间取向的量子化于 1921 年到 1922 年期间完成的一个著名实验。该实验首次证实了原子角动量在磁场中空间取向的量子化，是原子物理和量子力学的基础实验之一。它还提供了测量原子磁矩的一种方法，并为原子束和分子束实验奠定了基础。

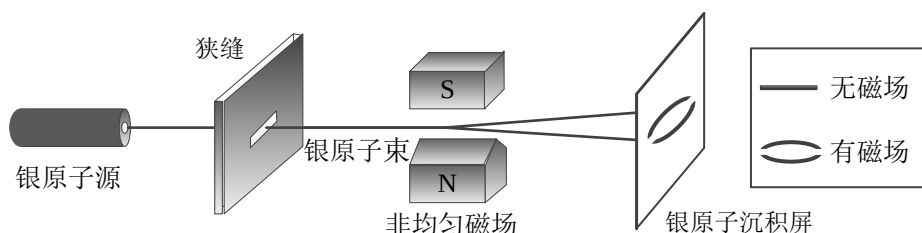


图23.8 施特恩-格拉赫实验装置示意图

施特恩-格拉赫实验装置如图 23.8 所示。银在电炉内蒸发形成银原子蒸汽，从炉上小孔发射出的银原子通过狭缝形成细原子束，经过不均匀的磁场区域，最后沉积到观察屏上。整个装置放在真空容器中。

实验发现，在不加磁场时，观察屏上呈现一条正对狭缝的银原子沉积带，如图 23.8 中所示；加上磁场后则呈现出上下两条沉积带。这说明原子束在经过非均匀磁场区时分裂为两束。这一现象证实了原子具有磁矩，且磁矩在外磁场中只有两种可能取向，即磁矩的空间取向是量子化的，从而证实了原子角动量空间取向的量子化。

按照经典电磁理论，如果取磁场 B 的方向为 z 轴正方向，原子的磁矩 μ 与 z 轴的夹角为 θ ，磁场的大小对 z 轴的变化率为 dB/dz ，则磁矩在 z 方向受到的磁场力为

$$F_z = \mu \frac{dB}{dz} \cos \theta = \mu_z \frac{dB}{dz}$$

文档23.2
施特恩

可见 F_z 与磁矩 μ 在磁场中的取向有关。如果磁矩在外磁场方向的投影是量子化的（即角动量在空间的取向是量子化的），则必然导致原子在不均匀外磁场中受到的磁力 F_z 也是量子化的，从而在底片上形成几条分裂的原子沉积带。

按轨道角动量空间取向的量子化理论，当电子的轨道角量子数为 l ($l=0,1,2,\dots,n-1$) 时，轨道角动量在空间的取向应有 $2l+1$ 种可能，磁矩也应有 $2l+1$ 个空间取向，即有奇数个可能的空间取向，所以观察屏上应该出现奇数条原子沉积带。但实验中却只出现了两条沉积带。显然，这一矛盾是轨道角动量空间取向的量子化理论所不能解释的。



施特恩

23.2.2 电子自旋

文档23.3
乌伦贝克

施特恩-格拉赫实验虽然直接证明了原子磁矩和角动量空间取向的量子化，但是却与电子轨道角动量空间取向的量子化理论相矛盾。这是因为对于外层只有一个价电子的银原子来说，当它处于基态时，银原子中电子的轨道角动量为零，磁矩也应该为零，这样的原子束通过磁场时不应发生偏转，但实验结果是一束银原子在磁场中分裂成了对称的两束。此外，上一节中提到的反常塞曼效应也不能用轨道角动量空间取向的量子化理论来解释。这预示着原子系统中还有另外一类磁矩尚未被认识到。为了说明和解释上述施特恩-格拉赫实验的实验结果。1925年，荷兰物理学家乌伦贝克和古德斯密特在分析原子光谱实验的基础上提出了电子自旋假设。通过对实验现象的分析，他们指出：

(1) 电子具有自旋。自旋是电子的内禀属性，电子的自旋角动量与轨道角动量大小的表达式相同，即自旋角动量的大小为

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (23.16)$$

式中 s 称为**自旋量子数** (spin quantum number)，它只有一个值，即 $s=1/2$ 。

(2) 自旋角动量 $\mathbf{S}$ 在空间的取向是量子化的。即 $\mathbf{S}$ 在 z 轴（通常取沿外磁场方向）上投影的大小 S_z 是量子化的，只能取两个数值，即

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (23.17)$$

式中 m_s 称为**自旋磁量子数** (spin magnetic quantum number)。

图 23.9 表示了自旋角动量在空间取向的量子化。

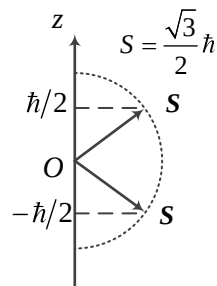


图23.9 电子自旋角动量空间取向的量子化

(3) 自旋磁矩 μ_s 与自旋角动量 $\mathbf{S}$ 方向相反，两者的关

系可表示为

$$\mu_s = -\frac{e}{m} S \quad (23.18)$$

因为 $S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$ ，所以自旋磁矩在 z 轴上的分量为

$$\mu_{sz} = \pm \frac{e}{2m} \hbar = \pm \mu_B \quad (23.19)$$

式中， μ_B 称为玻尔磁矩。

1927 年，费浦斯和泰勒改用氢原子束重复了施特恩-格拉赫实验。这个实验很重要，因为氢是单电子原子，量子力学在氢原子理论中被证明是可靠的。处于基态的氢原子，其 $l=0$ ，因此不存在轨道磁矩，如果不考虑电子自旋，在非均匀磁场中氢原子束不会分裂。然而实验结果表明，氢原子束还是分裂为两束，观察屏上出现了两条条纹，这表明，处于基态的氢原子也有磁矩。所以，这个实验直接证实了电子自旋假设的正确性。

电子自旋假设不仅成功地解释了施特恩-格拉赫实验。同时还可以对反常塞曼效应和原子光谱的精细结构作出合理解释。自旋现象的发现是人类认识微观粒子的一大进步。事实证明，质子、中子与光子也都有自旋存在，但自旋量子数并非都是 $1/2$ ，例如光子的自旋量子数为 1 。依据粒子的自旋状态，可以把它们分为两大类：自旋量子数为半整数的粒子称为费米子(fermion)，如电子、质子和中子都是费米子；自旋量子数为整数的粒子称为玻色子(boson)，如光子就是一种玻色子。

23.2.3 四个量子数（表征电子的运动状态）

如前所述，我们在对氢原子结构的描述中引入了四个量子数 n 、 l 、 m_l 、 m_s ，用以表征电子的运动状态。对于其它的多电子原子，其薛定谔方程比氢原子的情况要复杂得多，但近似计算表明，其核外电子的运动状态仍由四个量子数决定，即

(1) 主量子数 n ($n=1,2,3,\dots$) 决定了原子中电子能量的主要部分。

(2) 角量子数 l ($l=0,1,2,\dots,(n-1)$) 决定了原子中电子的轨道角动量。一般来说，主量子数 n 相同，但 l 不同的电子状态，其能量稍有不同。

(3) 磁量子数 m_l ($m_l=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm l$) 决定了轨道角动量在外磁场方向上的分量，即轨道角动量的空间取向。

(4) 自旋磁量子数 m_s ($m_s=\pm 1/2$) 决定电子的自旋角动量在外磁场方向上的分量，即自旋角动量的空间取向。它也会影响电子在外磁场中的能量。

§23.3 多电子原子的壳层结构

23.3.1 多电子原子的壳层结构及电子组态

一般情况下，若要确定原子中电子的运动状态，需用四个量子数 n 、 l 、 m_l 、 m_s 来描述其中每一个电子的运动状态，正是这些状态决定了电子在原子核外的分布。下面将从四个量子数出发，描述原子核外的电子分布情况。

1916 年，柯塞耳(Kossel)提出了原子的壳层结构模型。他认为原子核外电子组成许多壳层，主量子数 n 相同的电子同属一个主壳层。后来，人们把对应于 $n=1,2,3,\dots$ 的各主壳层分别用大写字母 K, L, M, N, O, P, $\dots$ 表示。在同一主壳层上角量子数 l 相同的电子组成次壳层(或支壳层)，对应于 $l=0,1,2,\dots,(n-1)$ 的各次壳层分别用小写字母 s, p, d, f, g, h, i, $\dots$ 表示。电子的状态可用 n 、 l 来表示，如 K 壳层 s 次壳层上的电子，以 1s 表示其电子态，而 L 壳层中的 p 次壳层上的电子，以 2p 表示该电子态。

人们将原子中每个电子所属的主壳层和次壳层都用 nl 的组合表示出来，其中 l 的值用相应的符号表示，就可以说明核外电子的分布情况，这种描述称为原子的**电子组态**。例如处于基态的钠原子的电子组态为： $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ，它表示 2 个电子处于 1s 态，2 个电子处于 2s 态，6 个电子处于 2p 态，1 个电子处于 3s 态。在一个原子的所有电子组态中，具有最低能量的组态是最稳定的，称为基态电子组态，其余的组态称为激发态电子组态。

23.3.2 电子的壳层分布规则

原子中的电子在核外的分布遵从两个原理。

1. 泡利不相容原理

文档23.4
泡利

1925 年，奥地利物理学家泡利在分析了原子光谱和其他实验事实后指出：在一个原子中不可能有两个或两个以上的电子处于相同的状态，即不可能有两个或两个以上的电子具有一组相同的四个量子数。这条规律称为**泡利不相容原理**(Pauli exclusion principle)。

根据泡利不相容原理，对于给定的主量子数 n ，角量子数 l 的可能取值有 n 个，即 $l=0,1,2,\dots,(n-1)$ ；对其中任意一个 l 值，磁量子数 m_l 的可能取值为 $m_l=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\pm l$ ，共 $2l+1$ 个；当 n, l, m_l 都确定后，自旋磁量子数 m_s 的可能取值只有 $+1/2$ 和 $-1/2$ 两个。



泡利

由此，根据泡利不相容原理可以确定各主壳层和次壳层上最多可能容纳的电子数。在 n 相同的同一次壳层上最多可容纳的电子数为： $2(2l+1)$ ；在同一主壳层上最多能容纳的电子数是

$$Z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad (23.20)$$

例如：当 $n=1$ ， $l=0$ 时，有 $m_l=0$ ，在这一状态下最多只能容纳两个自旋量子数 m_s 分别为 $+1/2$ 和 $-1/2$ 的电子，即在K壳层的s次壳层上可有两个电子，以 $1s^2$ 表示其电子态；同理，当 $n=2$ ， $l=0$ 时，即在L壳层中的s次壳层上，也只可能有两个电子，以 $2s^2$ 表示；当 $n=2$ ， $l=1$ 时，因为 m_l 有三个可能值0、1和-1，即有三个状态，而且在每个状态上 m_s 又均可取 $+1/2$ 和 $-1/2$ 两个值，因此共有6个电子，即在L壳层中的p次壳层上最多可以有6个电子，以 $2p^6$ 表示。故在L壳层中最多可以有8个电子。表23.1列出了各主壳层和次壳层中最多可容纳的电子数。

表 23.2 原子主壳层和次壳层中最多可能容纳的电子数

$n \backslash l$	0	1	2	3	4	5	6	$Z_n(2n^2)$
	s	p	d	f	g	h	i	
1 K	2							2
2 L	2	6						8
3 M	2	6	10					18
4 N	2	6	10	14				32
5 O	2	6	10	14	18			50
6 P	2	6	10	14	18	22		72
7 Q	2	6	10	14	18	22	26	98

2. 能量最小原理

电子在原子中的分布除了遵从泡利不相容原理外，还遵从**能量最小原理**：在原子处于正常状态下，每个电子趋于占据最低的能级。当原子中各电子的能量最小时，整个原子的能量最低，原子最稳定。电子能级的高低主要取决于主量子数 n ， n 越小，能级越低，因此越接近核的壳层一般首先被电子填满。但是能级的高低还与轨道角量子数 l 有关，当 n 一定时， l 越小，能级越低， l 越大，能级越高。因此在某些情况下， n 较大而 l 较小的能级可能比 n 较小而 l 较大的能级反而低，从而出现在 n 较小的壳层尚未填满时，就有电子先行填入 n 较大的壳层的情形。关于 n 和 l 都不同的状态的能级高低问题，我国科学家徐光宪总结出了一条规律——徐光宪定则：对于原子的外层电子而言，能级高低由 $(n+0.7l)$ 的值来确定，其值越大，相应的能级越高。例如对于4s和3d两个状态，4s的 $n+0.7l=4$ ，而3d的 $(n+0.7l)=4.4$ ，因此3d能级高于4s能级，电子先填充4s能级，然后才是3d能级。

量子力学的理论计算和实验观察都指出，原子中核外电子的填充顺序如图23.10所示。

23.3.3 元素周期表



门捷列夫

1869 年,俄国化学家门捷列夫发现了元素的周期律,即如果将元素按照相对原子质量由小到大排列,则元素的化学性质会出现有规律、周期性的重复,从而编制出了第一张元素周期表。元素周期表揭示了化学元素之间的内在联系,使其构成了一个完整的体系,成为化学发展史上的重要里程碑之一。随着科学的发展,元素周期表中未知元素留下的空位先后被填满。当原子结构的奥秘被发现后,编排依据由相对原子质量改为原子

的质子数(或核外电子数或核电荷数),形成现行的元素周期表。元素的周期律是自然界的基本规律之一,它反映了原子内部结构的规律性。根据泡利不相容原理和能量最小原理等量子力学理论所确定的原子核外电子在各主壳层和次壳层中分布的规律性,可以很好地说明多电子原子的化学性质,从而解释元素周期表的规律性。正常情况下原子处于基态,整个原子的能量最低,原子最稳定。表 23.3 列出了元素周期表中前 36 种元素处于基态时原子的电子组态。

第一周期只有两种元素,第一位是氢元素($z=1$),核外有一个电子,氢原子处于基态时,该电子在 $1s$ 态,其电子组态为 $1s^1$;第二位是氦元素($z=2$),核外有两个电子,氦原子处于基态时,两个电子都处于 $1s$ 态,所以氦原子的基态电子组态为 $1s^2$ 。至此第一主壳层已填满电子,第一周期结束。

第二周期有 8 种元素,排位第一的是锂元素($z=3$),原子核外有三个电子。由泡利不相容原理, $1s$ 态最多只能有两个电子,因此第三个电子填充在具有较高能量的 $2s$ 态。由此得到锂原子的基态电子组态为 $1s^2 2s^1$;排位第二的是铍元素($z=4$),原子核外有四个电子,它的基态电子组态为 $1s^2 2s^2$ 。这样第二主壳层($n=2$)的 s 次壳层($l=0$)已填满;排位第三的是硼元素($z=5$),原子核外有五个电子,当硼原子处于基态时,其中四个的电子组态为 $1s^2 2s^2$,第五个电子只能填充在 $2p$ 态($n=2, l=1$),所以硼原子的基态电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^1$,第六至十位元素分别是碳氮、氧、氟和氖。氖原子的基态电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6$,至此第二主壳层也已填满电子,第二周期结束。根据泡利不相容原理和能量最小原理,同样可以确定其它周期中各元素的核外电子的排列分布。

从表中可以看出,锂、钠和钾等元素的原子其核外内壳层都已填满(钾的 $3d$ 次壳层在 $4s$ 次壳层之外),最外壳层都只有一个电子,很容易失去而成为正离子与其他原子化合,因而化学性质非常活跃。氟、氯和溴等元素的原子在其电子填充的最外主壳层的 p 次壳层上都留有一个空位,容易获得一个电子后形成非常稳定的结构,成为负离子,因而化学性质也非常活跃。氢原子和氦原子中的电子正好分别填满 K 壳层和 L 壳层,氦原子

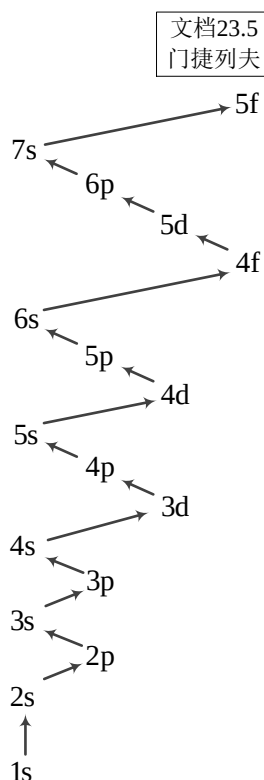


图23.10 核外电子
填充顺序

($z=18$)中的电子正好填满 K, L 壳层及 M 壳层的 p 次壳层, 因此化学性质稳定, 称为惰性气体。用同样的方法可以解释周期表中其它元素的化学性质。

表 23.3 元素周期表中前 36 种元素处于基态时原子的电子组态

原子序数 及元素	原子处于基态时的电子组态			
	K	L	M	N
1 氢 H	$1s^1$			
2 氦 He	$1s^2$			
3 锂 Li	$1s^2$	$2s^1$		
4 铍 Be	$1s^2$	$2s^2$		
5 硼 B	$1s^2$	$2s^2 2p^1$		
6 碳 C	$1s^2$	$2s^2 2p^2$		
7 氮 N	$1s^2$	$2s^2 2p^3$		
8 氧 O	$1s^2$	$2s^2 2p^4$		
9 氟 F	$1s^2$	$2s^2 2p^5$		
10 氖 Ne	$1s^2$	$2s^2 2p^6$		
11 钠 Na	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^1$	
12 镁 Mg	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2$	
13 铝 Al	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^1$	
14 硅 Si	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^2$	
15 磷 P	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^3$	
16 硫 S	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^4$	
17 氯 Cl	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^5$	
18 氩 Ar	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6$	
19 钾 K	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6$	$4s^1$
20 钙 Ca	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6$	$4s^2$
21 钪 Sc	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^1$	$4s^2$
22 钛 Ti	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^2$	$4s^2$
23 钒 V	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^3$	$4s^2$
24 铬 Cr	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^5$	$4s^1$
25 锰 Mn	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^5$	$4s^2$
26 铁 Fe	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^6$	$4s^2$
27 钴 Co	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^7$	$4s^2$
28 镍 Ni	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^8$	$4s^2$
29 铜 Cu	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^1$
30 锌 Zn	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2$
31 镓 Ga	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^1$
32 锗 Ge	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^2$
33 砷 As	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^3$
34 硒 Se	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^4$

35 溴 Br	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^5$
36 氪 Kr	$1s^2$	$2s^2 2p^6$	$3s^2 3p^6 3d^{10}$	$4s^2 4p^6$

§23.4 固体的能带结构

固体是一种重要的物质结构形态，是物理学主要的研究对象之一。固体物理研究的是固体的结构及其组成粒子(原子、离子、电子等)之间相互作用与运动规律，进而阐明其性能与用途。从 1927 年开始，量子力学理论用于研究固体物理，从而促进了对固体材料，半导体，激光，超导……的研究。

固体可以分为晶体和非晶体两大类。晶体具有规则的高度对称性的几何外形，具有确定的熔点，而且有一些物理性质是各向异性的。从微观上看，晶体中的分子、原子或离子在空间都呈有规则的、周期性的排列，形成空间点阵(简称晶格)。晶体结构的这种内在周期性决定了晶体的性质。不同种类的晶体具有不同的物理性质(如导电性能)，晶体的量子理论能圆满地说明这种差异。

23.4.1 电子共有化

前面我们介绍了氢原子的量子力学理论和多电子原子的壳层结构及其电子组态。对于单个孤立原子而言，原子中的电子束缚在原子核的周围，在原子核和原子中其它电子形成的势场中运动。为简单计，我们以只有一个价电子的原子为例来讨论。这类原子可以看成由一个电子和一个正离子组成，电子在离子的势场中运动，其势能曲线象一个势阱，如图 23.11 (a) 所示。当两个原子靠的很近时，每个价电子将同时受到两个离子产生的电场的作用，这时的势能曲线如图 23.11 (b) 中实线所示，在势阱中间有一势垒。当大量原子作规则排列时将形成如图 23.12 所示的周期性势场。

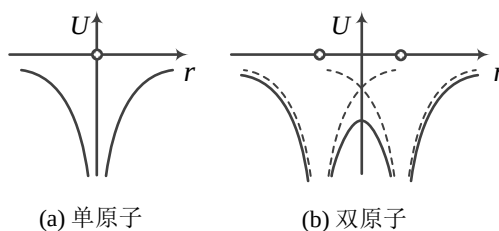


图23.11 原子的势场

23.11 (b) 中实线所示，在势阱中间有一势垒。当大量原子作规则排列时将形成如图 23.12 所示的周期性势场。

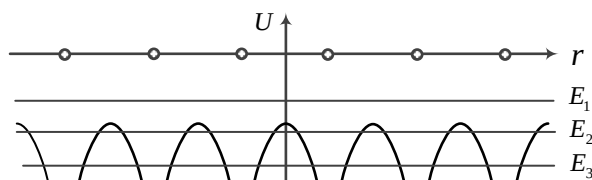


图23.12 大量原子规则排列的周期性势场

当大量原子作三维规则排列形成晶体时，晶体将形成三维周期性势场。确定晶体内电子在此周期性势场中的运动状态，需要求解薛定谔方程。通过求解薛定谔方程，可

以得出两点重要结论：1. 电子的能量是量子化的；2. 电子的运动有隧道效应。如图 23.12 中所示，对于能量为 E_3 的电子（如各原子的内层电子），势能曲线代表着很宽的势垒，因此，势垒穿透概率较小，基本上可以看作是束缚在各自离子的周围。能量为 E_2 的电子（如各原子的外层电子），势垒穿透概率较大，电子可以通过隧道效应在整个晶体中运动。对于能量为 E_1 的电子（如某些晶体中原子的价电子），其能量超过势垒高度，可以在晶体内自由运动，而不受特定离子的束缚。后两种电子不再属于各自的原子，而是被整个晶体中的原子所共有，这种由于晶体中原子的周期性排列而使电子不再为单个原子所有的现象，称为电子的共有化。内层电子的共有化程度小，与孤立原子的情况相近。价电子受母原子的束缚最弱，共有化程度最为显著。

23.4.2 能带的形成

若有 N 个完全相同的原子构成的一个系统，当原子与原子之间的距离足够大以至可以忽略它们之间的相互作用时，则每个原子都有相同的电子组态和能级。对于整个系统而言，能级结构与孤立原子基本相同，只是一个能级表示了系统的一个能态。

当原子间距逐渐缩小，互相靠近形成晶体时，各个原子的内层电子仍然组成围绕各原子核的封闭壳层，和孤立原子一样；然而，外层价电子则参与原子间的相互作用，被整个晶体中的原子所共有。晶体中电子共有化的结果，使原先每个原子中具有相同能量的能级，因各原子间的相互影响而分裂成为一系列和原来能级很接近的新能级。量子力学计算表明，固体中若有 N 个原子，由于各原子间的相互作用，对应于原来孤立原子的每一个能级，都分裂成了 N 个能级，如图 23.13 所示。其最高和最低能级之间的间隔一般只有几个电子伏特。对于一个实际的晶体，即使小到只有 $10\mu\text{m}^3$ ，晶体中的原子数也可达到 10^{12} 数量级，所以相邻两个新能级之间的间隔非常小，远小于 10^{-12}eV 的数量级，因此这些分裂形成的 N 个能级可以看成是连续分布的，这就是**能带**（energy band）。通常采用与原子能级相同的符号来表示能带，如 $1s$ 、 $2s$ 、 $2p$ 、 $3s$ 、 $3p$ 等。

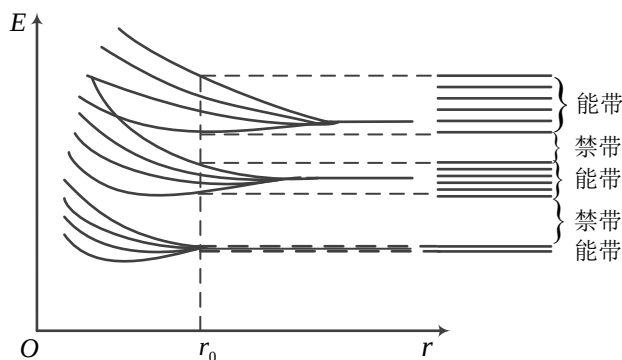


图23.13 晶体中的能级分裂形成能带示意图

能带的宽度与多种因素有关：一是与原子间距有关，间距愈小，能带愈宽；二是与原子中的内层与外层电子的状态有关。对内层电子，由于它们距自身核很近，受邻近原

子核的作用较弱，因此内层能带宽度较小；而外层价电子由于与自身核的距离和相邻原子核的距离处于同等数量级，受相邻原子的作用强烈，因此能级分裂形成的能带较宽。

23.4.3 满带 导带和禁带

晶体中的电子在能带中的分布同样服从泡里不相容原理与能量最小原理。某一能级分裂成由 N 条能级组成的能带后，每个能带可以容纳的电子数等于与该能带相应的原子能级所能容纳的电子数的 N 倍，即最多能容纳 $2N(2l+1)$ 个电子，如图 23.14 所示。正常情况下，电子总是优先填充能量较低的能级。能带的性质决定了晶体的导电特性。如果一个能带中的各能级都被电子填满，这样的能带称为**满带**（filled band）。当能带被电子填满时，由于电子没有自由活动的空间，以至在外电场中形成不了电流，这好比停车场被汽车占满，没有留下任何通道，以至车辆无法进出一样，因此满带中的电子不参与导电过程。

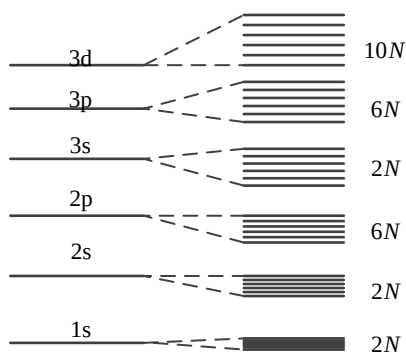


图23.14 原子能级，晶体能带及最多容纳的电子数

由价电子能级分裂而形成的能带称为**价带**（valence band），如图 23.15 所示。通常情况下价带是被电子所填充的能量最高的能带，价带可能被填满，成为满带，也可能未被填满。未被填满的价带中的电子，在外电场的作用下，可以进入价带中未被填充的高能级，没有反向的电子转移与之抵消，因而形成电流，表现出导电性，因此，这种未被电子填满的价带称为**导带**（conduction band）。与原子的各激发能级相应的能带，在未被激发的正常情况下没有电子填入，称为**空带**（empty band）。被激发到空带中的电子，在外电场的作用下，可以进入空带中未被填充的其它能级，没有反向的电子转移与之抵消，因而也可形成电流，表现出导电性，所以空带也是导带。

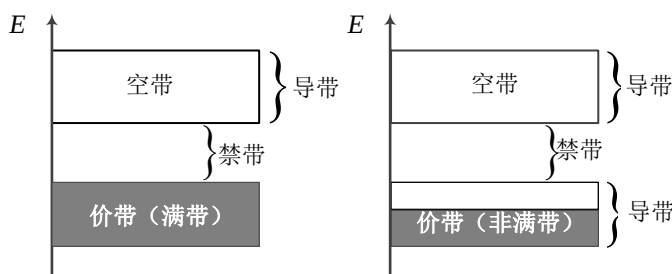


图23.15 晶体的能带结构

原子的每个能级在晶体中要分裂成一个能带，在两个相邻的能带间，可能有一个电子的能量不允许取值的区域，这个能量区域称为**禁带**(forbidden band)。两个能带也可能相互重叠，这时禁带消失。

§23.5 导体 绝缘体 半导体

23.5.1 导体 半导体和绝缘体的能带特征

晶体按导电性能的高低可以分为**导体(conductor)**，**半导体(semiconductor)**和**绝缘体(insulator)**。它们的导电性能不同的原因，用量子力学的理论来解释，是因为它们的能带结构不同。

导体的能带结构或者是价带未被电子填满成为导带，或者是价带虽被填满但与上层空带紧密相连或部分重叠而成导带，如图 23.16(a)所示。如有外电场作用，导带中的电子很容易从一个能级跃入另一个能级，从而形成电流，显示出很强的导电能力。以金属锂(Li)为例，它的基态电子组态为 $1s^2 2s^1$ ，根据泡利不相容原理，2s 价带可以容纳 $2N$ 个电子，而 N 个锂原子价电子总数只有 N 个，价带只填充了一半的电子，所以金属锂是良导体。又比如金属镁(Mg)，它的基态电子组态是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ ，价电子总数为 $2N$ ，刚好填满3s 价带，但是因为3s 能带与上层的3p 空带部分重合，所以金属镁也是导体。至于金属钠(Na)，它的基态电子组态为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s$ ，根据泡利不相容原理，3s 价带可以容纳 $2N$ 个电子，而价电子总数只有 N 个，价带未填满，3s 能带形成导带，又与上方的3p 空带重叠，从而形成了更宽的导带，所以金属钠也是良导体。

绝缘体的能带结构完全不同于导体，其价带被电子充满，价带与上层空带之间的禁带宽度较大，为 $3\sim 6\text{ eV}$ ，如图 23.16(c)所示。若用一般的热激发，光照或外加电场不强时，满带中的电子很少能被激发到空带中去，所以在外电场的作用下，一般没有电子参与导电，表现出电阻率很大。

半导体的导电特性介于导体和绝缘体之间，它的能带结构与绝缘体相似，在绝对零度时价带被电子填满，但是价带与上层空带之间的禁带宽度与绝缘体相比要小得多，为 $0.1\sim 1.5\text{ eV}$ ，如图 23.16(b)所示。因此，价带中的电子获取不多的能量就可以被激发到空带上去产生导电特性。一般随着温度的升高或照射光强的增大，会使大量电子激发到上层空带中，从而形成导带，所以半导体的导电特性对于温度和光照的变化非常敏感，这称为半导体的热敏性和光敏性。

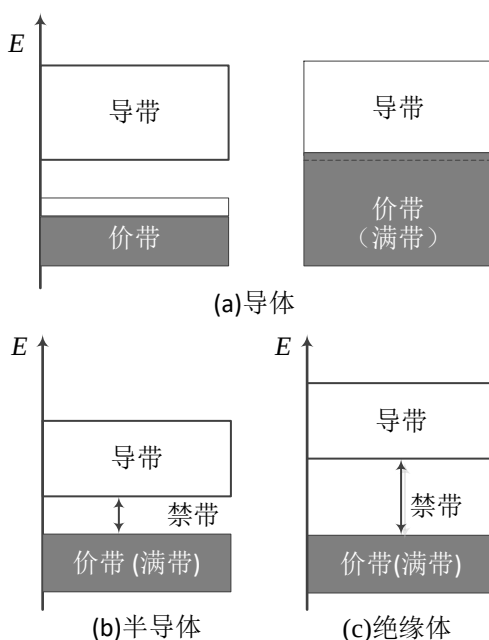


图23.16 导体，半导体和绝缘体的能带结构

23.5.2 电子和空穴

半导体的满带和空带之间存在着禁带，但禁带宽度较小。在绝对零度时价带被电子填满，导带是空着的。在热或者光的作用下，满带上的部分电子会跃迁到空带，使空带变成导带，同时在满带中留出空的量子态，这种满带中的空位称为**空穴(hole)**。显然激发到空带中的电子和满带中出现的空穴总是成对出现的，如图 23.17 所示。

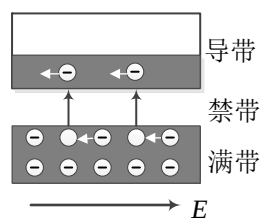


图23.17 本征半导体 电子与空穴

23.5.3 半导体的导电机理

在外电场作用下，被激发到空带中的电子将参与导电，称为**电子导电**。同时在满带中空穴邻近的电子会逆着电场方向跃入空穴，同时又留出新的空穴由其他电子来填补，以此类推。电子依次沿逆电场方向填补空穴，其产生的效果等同于正电荷沿电场方向流动，从而形成电流，如图 23.17 所示。这种由于满带中存在空穴所产生的导电性能称为**空穴导电**。半导体中被激发到空带上的电子和满带上的空穴都可以参与导电，因此电子和空穴统称为**载流子(current carrier)**。半导体中载流子的数目随温度的升高按指数规律上升，因此半导体的导电特性对温度极其敏感，其电导率随温度的升高而增大。这一点正好与金属的情形相反，金属的电导率随温度的升高反而减小。

对于没有杂质和缺陷的纯净半导体，其导电机理是电子和空穴的混合导电，这种导电称为**本征导电**，参与导电的电子和空穴称为**本征载流子**。这种没有杂质和缺陷的半导体称为**本征半导体(intrinsic semiconductor)**。

§23.6 PN 结 半导体器件

23.5.1 n 型半导体 p 型半导体

在纯净半导体中，可以用扩散等方法掺入少量其它元素的原子。所掺进的原子，对半导体基体而言称为杂质。掺有杂质的半导体称为**杂质半导体(impurity semiconductor)**。适当的掺杂能显著改变半导体的导电性能。既能提高其导电能力，又能改变其导电机理。杂质半导体一般可以分为两类：一类以电子导电为主，称为**n 型(或电子型)半导体**；另一类以空穴导电为主，称为**p 型(或空穴型)半导体**。下面对其导电情况分别予以说明。

半导体硅 Si 和锗 Ge 都具有金刚石晶体结构，每个原子与邻近四个原子形成四个共价键连接。以锗为例，若将五价的砷 As 原子掺入其中，砷原子在锗晶体中将替代锗原子。由于砷原子的外层有五个价电子，其中四个与相邻的四个锗原子形成共价键，剩余的一个价电子由于受砷原子的束缚较弱，容易被热激发而电离，其从束缚态激发到导带所需的能量称为电离能。量子力学的计算表明，一般五价杂质的电离能远小于半导体的禁带

宽度，例如，砷原子在锗晶体中掺杂所产生的电离能约为 0.01eV ，它比锗的禁带宽度（约为 1eV ）小的多。这时，在半导体的价带和导带之间，产生一个离导带底很近的附加能级，即杂质能级，如图 23.18(a)所示。杂质原子上的电子在杂质能级上时，并不参与导电。但由于杂质能级紧靠导带低端，杂质能级的价电子容易激发到导带上，参与导电。在温度不高时，导带中的电子主要来源于杂质。由于五价原子能提供导电电子，故称这种杂质原子为**施主(donor)**，相应的杂质能级称为**施主能级(donor level)**。这种主要靠杂质电子导电的半导体称为电子型半导体，又称 **n 型半导体**。

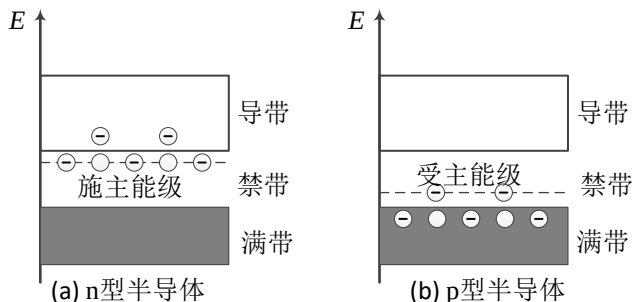


图23.18 杂质半导体

如果把三价的杂质原子(比如硼 **B**)注入锗晶体中，硼原子在锗晶体中将替代锗原子，由于硼原子的外层只有三个价电子，与周围四个锗原子形成共价键还缺少一个电子，因而形成一个空穴。量子力学的计算表明，该空穴的电离能也约为 0.01eV ，远小于禁带宽度，在半导体的价带和导带之间，产生一个离价带顶很近的杂质能级，如图 23.18(b)所示。该杂质能级位于价带上方紧靠价带顶端，因此价带中的电子很容易被激发到杂质能级上去，从而在价带中产生大量可参与导电的空穴，使其导电性能大大提高。三价元素掺杂的半导体主要靠空穴导电，故称空穴型半导体，又称 **p 型半导体**。由于三价原子具有接受电子的特性，故称为**受主(acceptor)**，相应的杂质能级称为**受主能级(acceptor level)**。

实际的半导体中既有施主杂质（浓度 n_d ），又有受主杂质（浓度 n_a ），两种杂质有补偿作用：当 $n_d > n_a$ 时为 **n 型半导体**，若 $n_d < n_a$ 为 **p 型半导体**。

23.5.2 p-n 结

利用杂质的补偿作用，可以制成 **pn 结**。在一块 **n 型半导体** 基片的一侧掺入较高浓度的受主杂质，由于杂质的补偿作用，该区就成为 **p 型半导体**。由于 **n 区** 和 **p 区** 的电子和空穴浓度不同，**n 区** 的多数载流子电子要向 **p 区** 扩散，同时 **p 区** 的多数载流子空穴要向 **n 区** 扩散，**n 区** 一侧因缺少电子而带正电，**p 区** 一侧因缺少空穴而带负电，从而在这两个区域交界面的附近形成一个空间电荷区(偶电层)，产生一个方向由 **n 区** 指向 **p 区** 的电场，称为**内建电场(internal electric field)**。内建电场将阻碍扩散的进一步发展，当两者达到平衡时扩散停止，不再有净电荷的流动。在 **p 型 n 型半导体** 交界面附近形成的这种特殊结构称为**pn 结(pn junction)**，如图 23.19(a)所示。内建电场在 **pn 结** 处形成势垒，电势由 **p 区** 向 **n 区** 递增，如图 23.19(b)所示。**pn 结** 的形成伴随着其附近的能带形状的变化，从 **p 区**

到 n 区,能带发生了向下的弯曲,如图 23.20 所示。这是因为由 p 区向 n 区电势升高了 U_0 , 电子的电势能下降了 eU_0 , 于是 n 区导带电子的能量比 p 区导带电子的能量低 eU_0 。

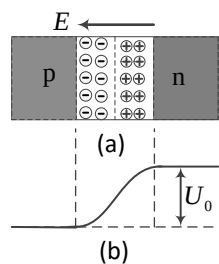


图23.19 pn结及电势分布

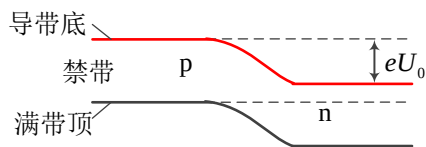


图23.20 pn结处能带变化示意图

当在 pn 结上加正向偏压（p 区接正极，n 区接负极）时，如图 23.21(a)所示，外电场将削弱内建电场，使空间电荷区变窄，势垒降低，有利于多数载流子扩散而形成由 p 区流向 n 区的电流，称为正向电流。外加正向电压越大，正向电流也越大。如果在 pn 结加上反向电压，如图 23.21(b)所示，这时外电场与内建电场方向一致，使空间电荷区加宽，势垒升高，不利于多数载流子扩散，但在电场作用下，p 区少数载流子电子向 n 区运动，n 区少数载流子空穴向 p 区运动，会形成很弱的反向电流。由此可见，pn 结具有单向导电性能，其伏安特性曲线如图 23.21(c)所示。

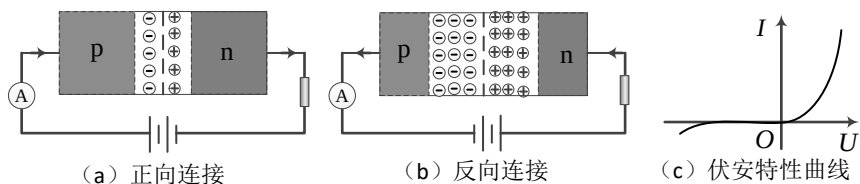


图23.21 pn结的正向连接，反向连接及伏安特性曲线

23.5.3 半导体器件

pn 结是许多半导体器件的核心，以它为基础可以做成具有整流、检波、控制、开关等功能的晶体二极管，具有放大作用的晶体三极管、场效应管，以及具有各种功能的集成电路、大规模和超大规模集成电路等半导体器件，这些半导体器件在现代高新技术和人们的日常生活中都发挥着不可替代的重要作用。下面，我们将简单介绍几种常见的半导体器件。

1. 发光二极管(LED)

发光二极管的核心部分是一个 pn 结，当在 pn 结上加正向偏压时，p 区的空穴和 n 区的电子进入结区并产生复合。从能带理论角度来看，就是导带下部的电子跃迁回价带，与价带中的空穴中和，在这一过程中电子的能量减少，因此会有能量释放出来。对于某些



图23.22 发光二极管

半导体，这部分能量是以辐射光子的形式释放出来，光子能量的大小近似等于半导体的禁带宽度。采用不同禁带宽度的半导体，发光二极管就发出不同频率的光，如砷化镓二极管发红光，磷化镓二极管发绿光，氮化镓二极管发蓝光，碳化硅二极管发黄光，如图 23.22 所示。发光二极管体积小，工作电压低，工作电流小，发光均匀、寿命长、被广泛用于数码显示和在电路及仪器中作为指示灯等。近来研制成功的高亮度白光二极管，开创了 LED 节能照明这一新兴产业。

2. 太阳能电池 光电二极管

太阳能电池(solar cell)和光电二极管(Photo-Diode)是将光信号转化为电信号的 pn 结型半导体器件。在它们内部有内建电场形成的势垒，当光照射这些器件时，携带能量的光子进入 pn 结后，把能量传给共价键上的束缚电子，使部分电子挣脱共价键，从而产生电子—空穴对，即光生载流子。在内建电场的作用下，光生载流子电子向 n 区运动，空穴向 p 区运动。这样，在 n 区便会有过剩电子，而在 p 区则会有过剩空穴，它们在 pn 结附近形成与原来的内建电场方向相反的光生电场。光生电场抵消内建电场的作用，使 p 区带正电，使 n 区带负电，在 n 区和 p 区之间产生了电动势，这就是光生伏特效应，如图 23.23 所示。若是将外电路接通，便会有电信号输出，这种利用太阳光照射 pn 结产生电能的装置称为太阳能电池。自 1954 年美国贝尔实验室开发出光电转换效率为 6% 的单晶硅光电池，使利用太阳能发电进入实用以来，太阳能电池的研究取得了长足的进展。目前，砷化镓晶体太阳能电池的光电转换效率已达 25% 以上。如今，太阳能电池的应用已从军事、航天领域进入到工业、农业、公用设施和日常生活等诸多领域，为我们提供着源源不断的可再生清洁能源。图 23.24 为太阳能电池及 LED 照明实例。

光电二极管和普通二极管一样，它的核心部分也是一个 pn 结。和普通二极管相比，在结构上不同的是，为了便于接受入射光照，pn 结面积尽量做的大一些，电极面积尽量小些，以便接收入射光，而且 pn 结的结深很浅，一般小于 1 微米。光电二极管在反向偏压下工作，没有光照时，反向电流（称为暗电流）极其微弱；当有光照时，光生载流子在反向电压作用下参加漂移运动，使反向电流明显变大。光的强度越大，反向电流也越大。光电二极管在光照下产生的电流称为光电流，光强的变化引起光电流变化，从而把光信号转换成电信号，实现光电传感与检测功能。光电三极管(Photo-transistor)除具有光电转换的功能外，还具有放大功能。

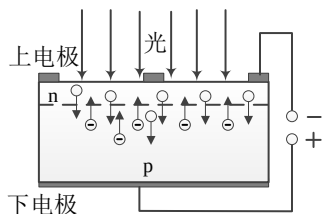


图23.23 光伏效应示意图



图23.24 太阳能电池及LED照明

3. 晶体管

1947 年 12 月 23 日，美国贝尔实验室的肖克利(w. Shockley, 1910—1989)、巴丁(J. Bardeen, 1908—1991)和布拉顿(w. Brattain, 1902~1987)组成的研究小组，研制出了世界上第一只具有放大作用的点接触型锗晶体管 (transistor)，如图 23.25 所示。后来，晶体管又从点接触型发展到面接触型，如图 23.26 所示。

晶体管由两个 pn 结组合而成，分 pnp 型和 npn 型两种。下面以 pnp 型晶体管为例说明它们的工作原理。如图 23.26 所示，pnp 型晶体管是由两块 p 型半导体，中间夹一薄层 n 型半导体构成的，一侧的 p 区称为发射区，引出电极称为发射极(emitter)，记作 e；另一侧的 p 区称为集电区，引出电极称为集电极(collector)，记作 c；中间的 n 区称为基区，引出电极称为基极(base)，记作 b。发射区与基区之间的 pn 结称为发射结，集电区与基区之间的 pn 结称为集电结。



肖克利

文档23.6
肖克利



巴丁

文档23.7
巴丁

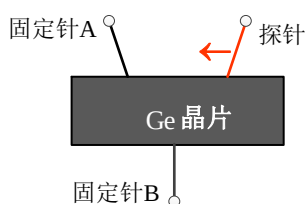


图23.25 点接触型晶体三极管

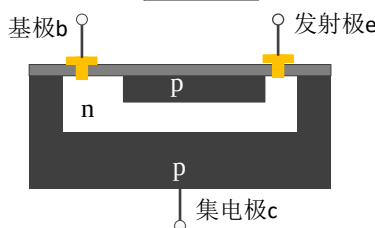


图23.26 面接触pnp型晶体三极管

pnp 型晶体管的工作原理如图 23.27 所示。发射极 e 的电势高于集电极 c 的电势，发射结加正向偏压，集电结加反向偏压。一般发射区的掺杂浓度要比基区高得多，因此从发射区到基区通过 pn 结的电流 I_e 以空穴为主。由于基区半导体很薄，且掺杂浓度低，因此只有少量空穴在基区与电子复合，绝大多数的空穴将加速越过反向偏置的集电结进入集电区，形成集电极电流 I_c 。在基区，空穴不断与电子复合，同时在正向偏压作用下从基极拉走空穴，不断提供可复合的电子，当两者达到动态平衡时就形成了基极电流 I_b 。基极电流较小，但它的些许变化就会引起集电极电流的较大变化。在发射极和基极之间输入一个弱的电信号，在集电极和发射极之间就会输出一个强信号，从而实现电信号的放大，这时的晶体管可以看作一个电流放大器。

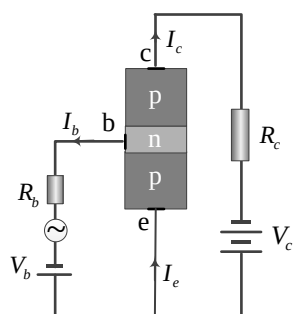


图23.27 晶体管工作原理图

因为在半导体研究和晶体管效应的发现等方面的贡献，肖克利、巴丁和布拉坦获得了 1956 年诺贝尔物理学奖。晶体管的问世，是 20 世纪的一项重大发明，是微电子革命的先声。相比于真空电子管，晶体管具有体积小、重量轻、耗电少、成本低、可靠性高、寿命长等优点，它的诞生使电子学发生了根本性的变革，加快了自动化和信息化的步伐，从而对人类社会的经济和文化产生深远的影响。

4. 集成电路

集成电路(Integrated Circuit), 缩写为 IC, 是一种微型电子器件, 它是通过半导体工艺把一定数量的常用电子元件, 如电阻、电容、晶体管以及这些元件之间的连线等集成在一小块或几小块半导体晶片上并封装在一个管壳内的具有特定电路功能的微型结构, 如图 23.28 所示。集成电路内的所有元件在结构上已组成一个整体, 使电子元件向着小型化、低功耗、智能化和高可靠性方面迈进了一大步。自集成电路发明算起, 集成度的提高几乎以每年翻一番的速度发展着。现代技术已经很容易在一块 1cm^2 的硅片上同时制作数百万个元器件。

集成电路具有体积小, 重量轻, 引出线和焊接点少, 寿命长, 性能好, 可靠性高, 成本低, 便于大规模生产等优点, 从而在军事、工业、民用电子设备等众多方面获得了广泛的应用。当今世界, 标志着现代文明的飞行器、宇宙飞船、机器人、汽车、计算机、手机以及各种先进的通信设施和互联网无一例外地建立在集成电路技术的基础之上。



图23.28 集成电路



基尔比

2000 年, 杰克·基尔比(J. S. Kilby, 1923-)被授予当年的诺贝尔物理学奖, 以表彰其于 1958 年 9 月发明了世界上第一块集成电路。

§23.7 激光

激光是 20 世纪 60 年代初发展起来的一种新型光源, 是量子理论与现代技术成功结合的产物, 是继原子能、计算机、半导体之后, 人类的又一重大发明。激光的英文名为“laser”, 它是“light amplification by stimulated emission of radiation”首字母的缩写, 意思是“辐射的受激发射光放大”。激光产生的机理可以追溯到 1916 年爱因斯坦提出的“受激辐射”理论。

23.7.1 受激吸收、自发辐射和受激辐射

根据量子力学理论, 原子的能量状态是量子化的, 这种量子化的能量状态称为能级。其中能量最低的状态称为基态, 其它能量较高的状态称为激发态。处于较低能态 E_1 的原子, 受到频率为 ν 的光子照射后, 当入射光子的能量满足 $h\nu = E_2 - E_1$ 时, 原子就可能吸收能量为 $h\nu$ 的光子而跃迁到高能态 E_2 , 这一过程称为**受激吸收**(stimulated absorption), 其示意图如图 23.29 (a) 所示。

处于激发态的原子很不稳定, 其寿命一般小于 10^{-8}s 。在没有外界干预的情况下, 原子很快就会自发地跃迁到低能态, 同时放出一个能量为 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子, 这种跃迁称为**自发跃迁**。由自发跃迁而引起的光辐射称为**自发辐射**(spontaneous emission), 其示意图如

图 23.29 (b) 所示。自发辐射是一个随机过程，各原子在自发辐射时发出的光子的传播方向、振动方向，初相位都没有确定的关系，是随机的，因此自发辐射发出的光是不相干的。普通光源的发光都属于自发辐射。

处于高能态 E_2 的原子，会在外来光子（如果其频率恰好满足 $h\nu = E_2 - E_1$ ）的诱发下向低能态 E_1 跃迁，并发出一个与外来光子的振动频率、振动相位、传播方向和偏振状态完全相同的光子，这一过程称为**受激辐射**(stimulated emission)，其示意图如图 23.29 (c) 所示。受激辐射理论是由爱因斯坦在 1916 年首先提出的。

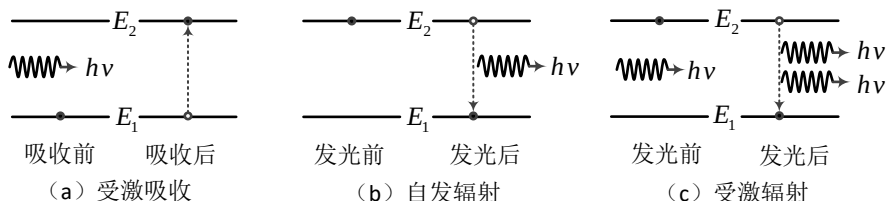


图23.29 光的吸收与辐射

23.7.2 激光原理

受激辐射的光放大是激光产生的基本机制。如果大量原子处在高能态 E_2 上，当有一个频率满足 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子入射时，可以使处于激发态 E_2 的原子产生受激辐射，从而得到两个特征完全相同的光子(全同光子)，这两个光子再激发另外两个处于 E_2 态的原子，又使其产生受激辐射，可得到四个特征完全相同的光子.....，以此类推，全同光子成倍增加，如图 23-30 所示，这意味着原来的光信号被放大了。这种在受激辐射过程中产生并被放大的相干光就是激光。

1. 粒子数正常分布和反转分布

激光是通过受激辐射来实现光放大的。但是当光与原子系统相互作用时，一般受激吸收、自发辐射和受激辐射三种过程同时存在。这三种过程包含了两对矛盾，一个是自发辐射和受激辐射的矛盾，自发辐射只能产生非相干光，只有受激辐射才能产生激光；另一个是受激辐射和受激吸收的矛盾，受激辐射过程使光子数成倍增加，而受激吸收过程使光子数减小。哪一种过程占主导取决于原子系统的状态。要获得激光，必须使受激辐射在这两对矛盾中均占主导地位。

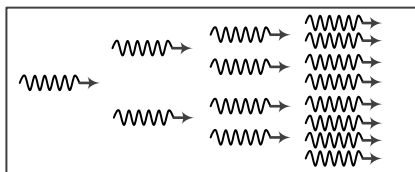


图23.30 受激辐射光放大示意图

统计物理理论指出，由大量原子组成的系统，在温度不太低的平衡态下，原子数目按能级的分布服从玻耳兹曼统计分布规律（参见 § 8.7.1 玻尔兹曼能量分布律），即在温度为 T 的平衡态下，原子处于能级 E_i 的数目 N_i 为

$$N_i \propto e^{-E_i/kT}$$

式中 k 为玻耳兹曼常数。因此处在能级 E_1 的原子数与处在能级 E_2 的原子数之比为

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-(E_1-E_2)/kT}$$

因为 $E_1 < E_2$ ，所以有 $N_1 > N_2$ ，这表明在热平衡下，处在低能级 E_1 的粒子数大于处在高能级 E_2 的粒子数，这种分布叫做**粒子数的正常分布**。此外，量子力学理论还指出，满足条件的外来光子与原子系统相互作用时，产生受激辐射的概率与处于低能级 E_1 的原子数 N_1 成正比，产生受激辐射的概率与处于高能级 E_2 的原子数 N_2 成正比。可见，在粒子数正常分布的情况下，由于大部分原子都处于低能级，而在高能级上的原子数量很少，因此受激吸收和自发辐射较之受激辐射总是占有主导地位，当光穿过工作物质时，光的能量只会减弱不会加强。要想使受激辐射占优势，从而实现光放大，必须使处在高能级 E_2 的粒子数大于处在低能级 E_1 的粒子数。这种非平衡态的粒子分布正好与平衡态时的粒子分布相反，称为**粒子数反转分布**，简称**粒子数反转**(population inversion)。因此，从技术上实现粒子数反转是产生激光的必要条件。

2. 激活介质

要实现粒子数反转，首先要有能够实现粒子数反转的物质，称为**激活介质**或**工作物质**。这种物质的原子结构中一般都存在寿命较长的亚稳态能级，原子在亚稳态的滞留时间一般可达 10^{-3}s ，甚至 1s 。氢原子、氖原子、氩原子、铬离子、铷离子以及二氧化碳分子等都存在亚稳态能级；其次要有必要的能量输入系统，使物质中有尽可能多的粒子吸收能量后跃迁到高能态，这一能量供应过程称为**激励**或**泵浦**(pumping)。激励的方式有光激励、气体放电激励、化学激励等。根据运行过程中所涉及的能级数，激活介质可分为三能级系统和四能级系统等。

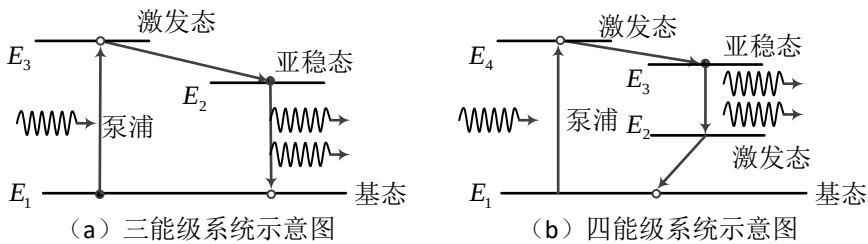


图23.31 激活介质的能级系统

三能级系统如图 23.31(a)所示。在正常情况下，处于基态能级 E_1 的原子数最多，而在激发态能级 E_2 和 E_3 的原子数较少。通过激励，把处于基态的原子迅速抽运到激发态能级 E_3 ，由于原子在 E_3 上的寿命很短，通过与其它原子的碰撞很快会跃迁到 E_2 上。 E_2 是个亚稳态能级，原子在这一能级滞留的时间较长，因此会出现原子的积累。当在亚稳态

能级 E_2 上积累的原子数超过基态能级 E_1 上的原子数时，在 E_2 和 E_1 之间就实现了粒子数反转。世界上第一台激光器以红宝石作为激活介质，它就是一个三能级系统。能级 E_3 的寿命只有约 10^{-8}s ，而亚稳态能级 E_2 的寿命约为 10^{-3}s 。三能级系统虽然能够实现粒子数反转，但由于基态总是聚集着大量的原子，因此要实现粒子数反转，外界抽运能力必须非常强。这是三能级系统的一个明显缺点。

四能级系统可以克服三能级系统在亚稳态和基态之间实现粒子数反转的缺点，其示意图如图 23.31(b)所示。四个能级中 E_1 是基态能级， E_2 、 E_3 、 E_4 都是激发态能级，其中 E_3 是个亚稳态。在外界激励下，处于基态的原子被大量抽运到激发态能级 E_4 ，然后通过碰撞迅速无辐射地跃迁到亚稳态 E_3 ，在该能级上形成原子积累。而能级 E_2 的寿命很短，不会形成原子的积累，因此处于该能级的原子很少。于是在能级 E_3 和 E_2 之间就形成了粒子数反转。因为激发态 E_2 上的原子数远少于基态 E_1 上的原子数，所以四能级系统比三能级系统更容易实现粒子数反转。氦氖激光器、二氧化碳激光器的工作物质都是四能级系统。

3. 光学谐振腔

工作物质激活后处于粒子数反转分布是形成光放大产生激光的必要条件，但还不足以得到一束单色性、方向性俱佳且强度高、寿命长的激光。这是因为初始激励来源于自发辐射，而原子的自发辐射是随机的，由此产生的受激辐射也是随机的，所辐射的光的频率、相位、偏振态和传播方向也是随机的，

因而辐射强度弱，寿命短，没有实用价值。要得到一束单色性、方向性俱佳且强度高、寿命长的激光还必须利用一种具有选择性光放大的光学装置，即**光学谐振腔**，其主要作用是产生和维持光振荡，并对光束的方向和频率加以选择。图 23.32 是光学谐振腔示意图，在工作物质的两端各放置一块反射镜，其中一块是全反射镜，另一块则是部分透光的反射镜，其反射率约为 99%，镜面法线与工作物质的轴线平行。工作物质受到激励实现粒子数反转后，大量原子处于激发态，有的产生自发辐射，有的产生受激辐射，这些光子射向四面八方，其中，沿非轴向传播的光子，经有限次反射后，很快逸出谐振腔外，只有那些沿着轴向传播的光子，在谐振腔内受到两端反射镜的反射而形成往复光振荡，如果谐振腔内单程信号增益大于单程损耗，则可产生自激振荡，同时引起连锁式受激辐射光放大。当光的放大作用和损耗作用达到平衡时，就形成稳定的光振荡。此时，从部分反射镜输出的就是方向性非常好的高强度激光。

除了产生和维持光振荡，并对光束的方向加以选择之外，光学谐振腔的另一个主要功能就是选频。在腔内沿轴向传播的光波必须形成驻波才能维持稳定的激光振荡。形成驻波的条件是

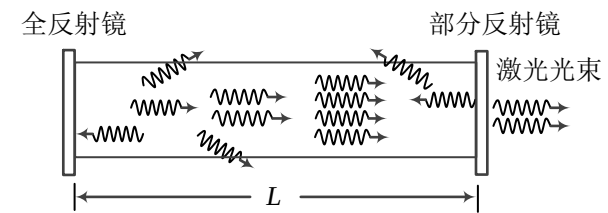


图23.32 光学谐振腔示意图

$$L = k\lambda_k / 2n \quad (23.21)$$

其中 λ_k 为光波波长, L 为谐振腔的长度, n 为介质的折射率, k 是整数。用频率 ν 表示, 则有

$$\nu_k = \frac{c}{\lambda_k} = k \frac{c}{2nL} \quad (23.22)$$

凡不满足上述条件的光会很快被削弱而遭淘汰, 能够形成激光的也就是几个能满足驻波条件的谐振频率。每个谐振频率称为一个纵模(longitudinal mode)。一般激光器是多纵模输出的, 但如果采取适当措施, 比如在反射镜上镀不同的介质薄膜, 使得反射镜只对特定的波长具有较高的反射率, 从而实现单纵模输出。因为纵模的光谱线宽很窄, 所以激光的单色性很好。

23.7.3 常用激光器的基本结构

文档23.9
梅曼

激光器的基本结构包含三个部分: (1) 工作物质; (2) 光学谐振腔; (3) 激励能源。自美国物理学家梅曼于 1960 年 9 月制成世界上第一台激光器——红宝石激光器以来, 满足不同需要的激光器先后研制成功。目前激光器的工作物质有近千种, 输出激光的波长从远红外、可见光、紫外线、直到 x 射线都有。按工作物质来分, 激光器可分为气体激光器(如 He-Ne, CO₂, Ar⁺)、固体激光器(如红宝石 Al₂O₃, 掺钕钇铝石榴石(Nd:YAG))、液体激光器(如某些染料)、半导体激光器(如砷化镓 GaAs)和自由电子激光器等; 按工作方式来分, 激光器可分为连续输出激光器和脉冲输出激光器。下面介绍两种简单的激光器。



梅曼

1 氦氖气体激光器

氦氖激光器是研制成功的第一种气体激光器, 也是实验室中最常用的一种激光器, 如图 23.33 所示。氦氖激光器由激光管和激光电源组成。激光管又由毛细放电管、电极和光学谐振腔组成。放电管是氦-氖激光器的心脏, 它是产生激光的地方。放电管中充入一定比例的氦(He)、氖(Ne)气体, 其中 He 是辅助物质, Ne 是激活物质, He 与 Ne 之比为 5:1~10:1, 总压强为 2~3($\times 133.3$ Pa)。如图 23.34 所示, 氦原子的能级中有两个亚稳态, 氖原子的能级中有两个与氦原子的这两个亚稳态十分接近的亚稳态能级 1 和 2。当电极加上高电压后, 毛细放电管中的气体开始放电, 放电管中的电子经电场加速后与氦原子进行碰撞, 使基态 He 原子跃迁到这两个亚稳态上。处于这两个亚稳态的氦原子与基态氖原子碰撞过程中, 产生能量的“共振转移”把能量传递给氖原子, 使其从基态跃迁到亚稳态能级 1 和 2 上, 从而在亚稳态 1 和 2 与激发态 3 之间形成粒子数反转分布。当受激辐射引起氖原子在能级 1 和 3 之间跃迁时, 即发射出波长为 632.8nm 的红色激光。在亚稳态氖原子向其它能级跃迁时发出的辐射在红外区, 通过选频处理, 可使氦氖激光器只输出波长为 632.8nm 的红色激光。

氦氖激光器具有结构简单, 使用方便、成本低, 且输出的激光单色性好等优点。常用氦氖激光器的功率一般约数毫瓦, 连续发光。

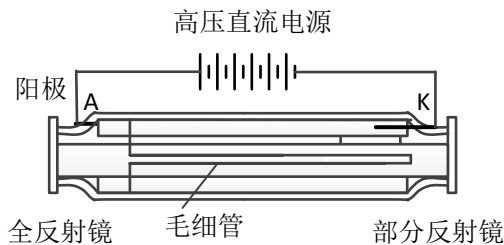


图23.33 氦氖激光器示意图

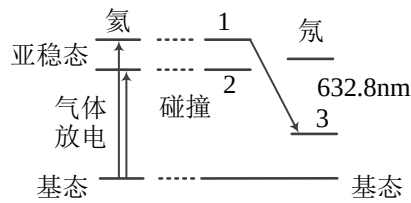


图23.34 氦和氖的原子能级示意图

2. 红宝石激光器

红宝石激光器结构如图 23.35 所示。其激励能源为脉冲氙灯，工作物质是掺有重量比约为 0.05% Cr_2O_3 的红宝石晶体棒， Cr^{3+} 在晶体中取代部分 Al_3^+ 的位置。如图 23.36 所示，在脉冲氙（Xe）灯的照射下，红宝石晶体中原来处于基态 E_1 的 Cr^{3+} 粒子，吸收了 Xe 灯发射的光子而被激发到 E_3 能级。粒子在 E_3 能级的平均寿命很短（约 10^{-9} 秒）。大部分粒子通过无辐射跃迁到亚稳态能级 E_2 上。粒子在能级 E_2 上的寿命很长，可达 3×10^{-3} 秒，所以在 E_2 能级上积累起大量粒子，形成 E_2 和 E_1 之间的粒子数反转，此时晶体对频率 ν 满足 $h\nu = E_2 - E_1$ 的光子有放大作用，即对该频率的光有增益。当增益 G 足够大，能满足阈值条件时，就在部分反射镜端输出波长为 694.3nm 米的脉冲激光。棒长 10cm，直径 1cm 的红宝石激光器，每次脉冲输出的能量为 10J，脉冲持续时间为 1ms，平均功率为 10kw。

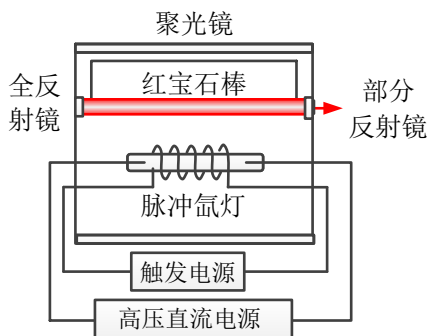


图23.35 红宝石激光器示意图

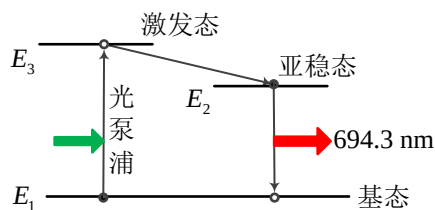


图23.36 Cr^{3+} 在红宝石中的能级示意图

23.7.4 激光的特性及应用

激光的特性可归纳为：方向性好、单色性好、相干性好、能量集中亮度高。

1. 方向性好 激光束的发散角非常小，一般只有毫弧度的数量级。氦氖激光器发出的激光束发散角接近 10^{-6} rad，因此几乎就是一束平行光。利用激光方向性好的特性，可将其用于定位、准直、导向、测距等。

2. 单色性好 光的单色性可用谱线宽度 $\Delta\lambda$ 来衡量。氦氖激光器发出的波长为 632.8 nm 的激光的谱线宽度 $\Delta\lambda$ 只有 10^{-9} nm。而在普通光源中单色性最好的是氪灯, 其谱线宽度为 4.7×10^{-3} nm。氦氖激光的单色性比氪灯发出的光的单色性高出万倍。利用激光单色性好的特点, 可以把激光波长作为长度标准, 用于精密测量; 在光纤通讯中, 可以减小中光信号在光纤中传播时的损耗。

3. 能量集中亮度高 由于激光的方向性好, 因此可以通过聚焦使能量高度集中。输出功率为 10mW 的 He-Ne 激光的亮度比表面亮度约为 $10^3 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$ 的太阳表面大几千倍。目前, 大功率激光器输出激光的亮度可高达 $10^{10} \sim 10^{17} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$ 的数量级。激光能量高度集中的特性被广泛用于各种固体材料的打孔、切割等精密机械加工; 在医学上用于激光外科手术; 在军事上用于激光武器等。

4. 相干性好 普通光源的发光过程是自发辐射, 发出的不是相干光。激光的发光过程是受激辐射, 辐射光子的特征完全相同, 因而激光的相干性极好。如 He-Ne 激光器发出的波长 632.8 nm 的激光相干长度可达几千米。利用激光干涉仪进行检测比普通干涉仪的精度高, 速度快。因而广泛用在干涉计量和测距, 全息摄影等领域。

激光的优良特性使它工、农、医、军事、科学技术以及日常生活等各个领域获得了日益广泛的应用, 并在诸多方面引起了革命性的突破。激光科学技术的发展和应用前景正在不断深入和扩大。

文档23.10 第23章思考题,习题答案

思考题

23.1 根据量子力学理论, 氢原子中电子的运动状态可用 n, l, m_l, m_s 四个量子数来描述。试说明它们各自确定什么物理量?

23.2 在多电子原子中, 电子在核外的分布遵循的原理是什么?

23.3 能级与能带有何不同? 固体的能带是怎么形成的?

23.4 本征半导体掺入何种杂质即可成为 n 型半导体, 它的多数载流子是什么? 又怎样成为 p 型半导体? 它的多数载流子是什么?

23.5 本征半导体与杂质半导体, 在导电性上有怎样的区别?

23.6 pn 结为何有单向导电性?

23.7 试述自发辐射与受激辐射的区别。

23.8 何谓激光? 它有哪些特性?

23.9. 激光器中的光学谐振腔就是由放置在工作物质两端、互相平行的一块全反射镜和一块部分反射镜组成的装置。光学谐振腔的作用是什么?

23.10 什么叫粒子数反转? 如何实现粒子数反转分布?

习题

23.11. 理论计算表明, 氢原子在 $n=2, l=1$ 状态的径向波函数为

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}r_1^{3/2}} \frac{r}{r_1} e^{-r/2r_1}$$

式中, r_1 为玻尔半径。试计算在此状态下, 电子概率最大处离核的距离。

23.12. 已知氢原子基态的径向波函数为 $R(r) = 2r_1^{-3/2} e^{-r/r_1}$, 式中 r_1 为玻尔第一轨道半径。求电子处于玻尔第二轨道半径 ($r_2 = 4r_1$) 和玻尔第一轨道半径处的概率密度的比值。

23.13. 在描述原子内电子状态的量子数 n, l, m_l 中, (1) 当 $n=4$ 时, l 的可能值是多少? (2) 当 $l=4$ 时, m_l 的可能值为多少? (3) 当 $l=3$ 时, n 的最小可能值是多少? (4) 当 $n=3$ 时, 电子可能状态数为多少?

23.14. 氢原子中的电子处于 $n=3, l=2$ 的状态。问: (1) 该电子角动量 L 的值为多少? (2) 这角动量 L 在 z 轴的分量有哪些可能的值? (3) 角动量 L 与 z 轴的夹角的可能值为多少?

23.15 设某一处于基态的原子, 其外层电子刚好充满 M 壳层。试问这是何种元素的原子, 其电子组态是怎样的?

23.16 发光二极管的半导体材料能隙(禁带宽度)为 1.9eV , 求它所发射光的波长。

23.17 已知硅的禁带宽度为 1.14eV , 金刚石的禁带宽度为 5.33eV 。求能使之发生光激发的入射光最大波长, 从而说明它们对可见光不同的透明度。

23.18 试从能带的观点说明绝缘体、导体和半导体导电性能的差别。

第 24 章 原子核物理与粒子物理

自从 1896 年贝克勒尔 (Becquerel) 发现原子核的放射性之后, 1911 年卢瑟福通过 α 粒子散射实验获得了原子内部存在原子核的正确认识, 人们便开始对原子核的结构以及物质结构进行更深层次的研究, 并对核能的开发与利用产生了兴趣, 建立了原子核物理这一分支学科。现在人们对物质结构的认识已深入到“基本粒子”世界, 基本粒子包括电子、中子、各种介子和各种超子等。研究基本粒子内部结构及其相互作用、相互转化规律的学科称为粒子物理, 又称为高能物理。

本章首先介绍原子核的组成与核的一般性质、核子运动的基本规律及它们之间的相互作用, 并对核能的利用作简单介绍; 继而介绍粒子家族和粒子间的相互作用、基本粒子间的守恒定律和夸克模型。

§ 24.1 原子核的组成和一般性质

24.1.1. 原子核的组成

1. 原子核的组成

实验已证实, 原子核是由质子和中子组成的。质子和中子统称为核子, 质子带一个基本单元的正电荷, 中子不带电。质子的质量为 $m_p = 1.672\ 623\ 1 \times 10^{-27}\text{ kg}$, 中子的质量为 $m_n = 1.674\ 928\ 6 \times 10^{-27}\text{ kg}$ 。由于质子和中子的质量都很小, 常采用原子质量单位量度, 以“u”表示。规定以碳的同位素 $^{12}_6\text{C}$ 原子质量的 $1/12$ 为一个原子质量单位, 即 $1\text{u} = 1.660\ 566 \times 10^{-27}\text{ kg}$ 。则质子的质量为 $m_p = 1.007\ 27\text{ u}$, 中子的质量为 $m_n = 1.008\ 66\text{ u}$ 。质子和中子的自旋都是 $1/2$ 。

任何一种元素的原子核都用符号 ^A_ZX 表示。其中 X 为该元素的化学符号, A 为质量数, Z 为原子序数。质量数为 A、原子序数为 Z 的核是由 Z 个质子和 $A-Z$ 个中子组成。可见, 质量数 A 反映了核内所含的核子总数, 原子序数 Z 反映了核内所含的质子数。由于原子核的所有性质取决于核的组成成分, 所以原子核的性质完全由 A、Z 决定。

具有特定质量数、原子序数与核能态, 且平均寿命长得足以被观测的一类原子称为**核素**。同一种元素可包括若干种核素, 自然界中的元素虽然仅有百余种, 但已知的核素却超过两千多种。有些核素的原子质量不同而化学性质相同, 属于同一元素, 且处于化学元素周期表中的同一格内, 有相同的原子序数, 故称它们为**同位素**。同位素原子间的差别仅在于它们的核所含的中子数不同, 如 ^1_1H (氕)、 ^2_1H (氘) 和 ^3_1H (氚) 是氢的三个同位素, 它们的核内均只有一个质子, 而分别含有 0 个、1 个和 2 个中子。另外, 具有相同 A 而不同 Z 的原子核称为**同量异位素**, 如 $^{40}_{18}\text{Ar}$ 和 $^{40}_{20}\text{Ca}$, $^{124}_{50}\text{Sn}$ 、 $^{124}_{52}\text{Te}$ 和 $^{124}_{54}\text{Xe}$ 是两组同量异位素。具有相同中子数而不同原子序数 Z (因而质量数 A 也不同) 的核称为**同中子素**, 如 $^{13}_6\text{C}$ 、 $^{14}_7\text{N}$ 和 $^{15}_8\text{O}$ 等。具有相同质量数和原子序数, 处于不同核能态的一类

核素称为**同量异能素**。同量异能素通常是在元素符号左上角质量数的后面加 m ，如 $^{99m}_{43}\text{Tc}$ 。

2. 原子核的大小

实验表明，原子核的半径 r 与核的质量数 A 之间有如下关系

$$r = r_0 \sqrt[3]{A} \quad (24.1)$$

式中， r_0 大体上是个常数，在一般的计算中可取 $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。由此可知，各种核素半径的数量级均在 $10^{-14} \sim 10^{-15} \text{ m}$ 范围内。而原子半径的数量级是 10^{-10} m ，可见原子核在原子内所占的体积十分小。

由原子核的质量和半径可估算出核的物质密度为

$$\rho = \frac{M}{V} \approx \frac{Au}{\frac{4}{3}\pi Ar_0^3} = \frac{3u}{4\pi r_0^3} \approx 2.3 \times 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (24.2)$$

这个数值是水的密度的 10^{14} 倍，由此可见原子核的密度是极高的。

24.1.2 原子核的自旋和磁矩

1. 原子核的自旋

自旋是描写微观粒子内禀运动的力学量。原子核存在自旋是 1924 年泡利在原子光谱超精细结构的实验基础上提出来的。设原子核的自旋算符用 $\hat{I}$ 表示，相应的量子数用 I 表示，则原子核自旋平方算符 $\hat{I}^2$ 的本征值为 $I(I+1)\hbar^2$ ，其中 I 取整数或半奇数。

实验表明，所有核子数 A 为偶数的核（偶 A 核）的自旋量子数 I 为整数（包括 0），所有核子数 A 为奇数的核（奇 A 核）的自旋量子数 I 为半奇数，所有质量数 A 和质子数 Z 均为偶数的核（偶偶核）的自旋量子数 I 为零。

2. 原子核的磁矩

由于核子的质量比电子质量大得多，所以用核磁子 μ_N 作为测量原子核磁矩的单位。定义核磁子 μ_N 为

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_N} = 5.050\,786\,6 \times 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \quad (24.3)$$

式中， M_N 为核子质量。由于核子质量比电子质量约大 1836 倍，所以核磁子比电子的玻尔磁子（ $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274\,015\,4 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ ）约小 1836 倍，可见原子核的磁矩比原子磁矩要小得多。

与电子自旋磁矩公式类似，原子核的磁矩与核自旋量子数 I 之间的关系为

$$\mu_I = g_I \sqrt{I(I+1)} \mu_N \quad (24.4)$$

式中， g_I 为原子核的朗德因子，它的计算比较复杂，这是因为核磁矩是所有核子的总自

旋磁矩和总轨道磁矩之和。核子包括质子和中子，质子带电，中子不带电。照说质子的朗德因子为 $g_{p,s} = +2$ ，磁矩等于 μ_N ；中子的朗德因子 $g_{n,s}$ 与磁矩都应等于零；然而，实验表明它们都具有反常磁矩！质子的朗德因子为 $g_{p,s} = 5.585$ ，磁矩为 $\mu_{p,s} = 2.792\,847\mu_N$ ；中子的朗德因子为 $g_{n,s} = -3.826$ ，磁矩为 $\mu_{n,s} = -1.913\,044\mu_N$ 。这表明质子和中子都不是点粒子，它们的内部还有结构，因此核磁矩的精确值一般都由实验提供。

24.1.3 原子核的结合能

原子核虽然是质子和中子组成的，但实验表明，任何原子核的静质量总是小于组成它的 A 个核子的静质量之和，这个差值 Δm 称为原子核的**质量亏损**。若干个核子组成原子核后，质量有亏损 Δm ，这表明核子结合成原子核时有能量放出；反之，若将原子核拆散成各个自由的核子，外界必须供给它同样数量的能量。于是，人们把与质量亏损 Δm 相应的那一部分能量变化称为原子核的**结合能**。按照爱因斯坦质能关系，质量数为 A 、原子序数为 Z 的原子核的结合能为

$$B = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_N]c^2 \quad (24.5)$$

式中， m_p 和 m_n 代表质子和中子的静止质量； m_N 代表原子核的静止质量。由于一般数据表中给出的都不是原子核的质量 m_N 而是相应的原子质量 M ，于是，在略去电子结合能的情况下，结合能表示为

$$B = [ZM_H + (A - Z)m_n - M(Z, A)]c^2 \quad (24.6)$$

式中， M_H 为氢原子静止质量； $M(Z, A)$ 代表质量为 m_N 的原子核相对应的原子的质量。

结合能的单位有两种：或用原子质量单位，或用兆电子伏。其中 1 个原子质量单位的质量亏损对应的结合能为 931.481 2MeV。

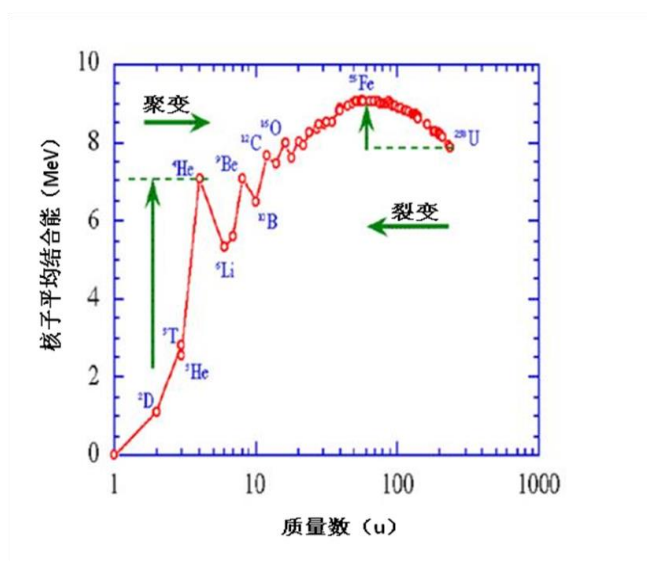


图 24.1 原子核中核子的平均结合能分布曲线

值得注意的是，这里的结合能均不包含核子的动能。其实在结合或分解过程中核子都可能具有动能，但结合能是指 A 个静止的核子组成核时释放的能量或将核分解为 A 个静止的核子所吸收的能量。由结合能的定义，可利用核的质量判断该核的稳定程度。如果某原子核的质量小于它可能转变成的其他一些核的质量和，则这种转变就不可能自发地产生，因此原来的核是稳定的；反之，该核是不稳定的，它会自发地转变为其他的核。

一般说来，重核的结合能大于轻核的结合能，因此仅凭结合能的概念不能说明原子核结合的紧密程度，故再引入平均结合能（或比结合能）的概念。 A 个核子结合成原子核时平均每具核时平均每一个核子释放出来的结合能称为平均结合能或比结合能，用 ε 表示，有

$$\varepsilon = \frac{B}{A} \quad (24.7)$$

ε 越大，表明核子结合得越紧密，该原子核越稳定；反之， ε 越小，原子核越不稳定。图 24.1 是各种原子核的平均结合能分布曲线。

研究表明，中等原子核在形成时平均结合能最大，使得人类可以用如下两种方法获得原子能量：一种是裂变，即将重核分裂成两个中等质量的核；另一种是轻核聚变。

24.1.4 核力的主要性质

由结合能的概念可知，要把原子核拆开成自由核子，外界必须对它做数值上等于结合能的功。这表明原子核内核子之间存在着强大的相互作用力，这种力是什么性质的力呢？是库仑力吗？不是，因为库仑力只会使核内质子相互排斥而不能束缚在一起形成稳定的核。是万有引力吗？更不是，因为万有引力太小，质子与中子的静质量均为 10^{-27}kg 数量级，使得万有引力在原子核内完全可以忽略不计。这种力也不可能是磁性力，因为质子和中子的磁矩都很小，它们之间的磁矩作用能只有 0.03MeV ，比核子的平均结合能小得多。所以，这种力是一种不同于电磁力和万有引力的作用力，人们称它为**核力**。核力的主要性质有以下几点：

(1) 核力是短程力。其力程为 10^{-15}m 数量级。超过这个范围，核力迅速减小；当 $r < 0.6\text{fm}$ ($1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$) 时表现为排斥力，当 $0.6\text{fm} < r < 2\text{fm}$ 为吸引力，当 $r > 2\text{fm}$ 时核力消失。

(2) 核力是强相互作用力。核力比电磁力大 $2\sim 3$ 个数量级，比万有引力约大 40 个数量级。

(3) 核力具有饱和性。原子核中每一个核子只与它邻近的少数几个核子有相互作用，这种性质称为核力的饱和性。

(4) 核力与电荷无关。实验表明，当质子和中子在核内所处的状态相同时，质子与质子、质子与中子、中子和中子之间的核力是完全相同的，核力的这种性质称为电荷无关性。因此，核力的大小只与核子总数有关，与所含的质子数与中子数无关。

(5) 核力与自旋有关。核力与自旋有关是指核力的作用总是使中子和质子倾向于处在自旋平行的状态中。这表明质子和中子之间的相互作用力主要是中心力，但使得它们的自旋取向相互平行。所以核力表现出与自旋有关的特性。

(6) 核力具有非有心力成分。核力的主要部分是有心力，但还有微弱的非有心力成份，其中的非有心力部分来源于两核子的自旋相对于核子间连线的取向。即核力的大小除了依赖于核子间距外，还与两核子的自旋相对于核子间连线的取向有关。

24.1.5 核结构模型

由于目前对核力的研究还很不完善，对于原子核的研究只能采取物理模型作近似描写。常用的几种原子核结构模型有液滴模型、费米气体模型、壳层模型和集体模型等，下面简略地介绍液滴模型。

鉴于原子核的诸多性质，如核子间的相互作用只发生在相邻的核子之间，所有核物质的密度为常数且不随核的大小变化，核是不可压缩的等性质均与液滴十分相似，从而提出：原子核如同一个液滴，形状近似球形的原子核结构液滴模型。该模型主要反映了核力的短程性和饱和性。利用该模型得到的结合能半经验公式不仅能得到精确度很高的结合能，而且还可以解释中、重核的中子超额现象。此外利用它还可解释核密度均匀、核裂变等核的某些性质。其缺点是未对核的内部结构做任何说明，因此它是一种最早也是最基本的原子核结构的唯象模型。

必须指出，每一种模型都是在一定的条件和范围内反映了原子核的某些侧面和特征，因此都有一定的局限性。不同模型之间相互补充，这些侧面的总和就构成了对原子核结构的相对正确的认识。

§ 24.2 核的放射性衰变

放射性衰变是原子核的一个极其重要的性质。所谓“放射性”是指原子核能自发地放出某种射线的性质，而“衰变”是指一种原子核放出射线后自发转变为另一种原子核的过程。因此“放射性衰变”可以说是一个问题的两个侧面，前者强调的是射线的放出，后者强调的是核的变化。

由于放射性衰变过程中既有粒子从核中飞出，又有核的自发性蜕变，因此放射性衰变是研究原子核的性质、结构及其内部运动规律的重要途径之一。

24.2.1 放射性的基本特征

1. 天然放射性的发现

1896 年贝克勒尔首先发现铀盐的天然放射性。他在研究物质发射荧光时偶然发现，铀盐能放射一种人的眼睛看不见的射线，这种射线能透过黑纸、玻璃、金属箔等使照相底片感光。特别引人注意的是，即使将这种铀盐存放在黑暗中几个月，经历晴天、阴天、刮风、下雨，它放出的射线使照相底片感光的能力也毫不减弱。贝克勒尔由此得到启发，

他认为铀盐发出的射线决不是荧光，而是一种穿透力很强的射线，这种射线的产生只与铀盐的存在有关，与天气的阴、晴及其他外界环境无关。

居里夫人（M. S. Curie）首先注意到了贝克勒尔的发现，并在 1898~1899 年期间，经过反复实验，成功地从沥青铀矿渣和钒盐中提取了两种放射性更强的金属元素钋（Po）和镭（Ra）。经过仔细研究，她认为，放出射线的数量只与铀、钋、镭在化合物中的含量成正比，而与它们所处的化学状态及外界湿度、压力等外界环境的变化无关。由此断定，放射现象是一种原子现象，并称这种现象为“放射性”。

自放射现象被揭示后，人们对发出的射线进行了深入研究。首先测得这种射线的能量一般为 10^6eV 数量级，比原子发出的光学谱线或 X 射线的能量大得多，而且实验还发现，凡是能引起原子性质变化的条件，如高温、高压、强磁场等都不会引起放射性的变化。这就迫使人们认识到，放射性其实不是原子的属性！而是原子核的属性。

实验测得，任何天然放射性元素所放出的射线只可能有三种： α 射线、 β 射线和 γ 射线。 α 射线即为带正电的 α 粒子束， β 射线即为带负电的电子束，而 γ 射线则为波长很短的光子束。

2. 放射性的来源

放射性来源于两个方面。一是来源于自然界中存在的天然放射性核素。这些天然的核素能自发地放出射线，它们多半为重核，如铀、钍、镭、钷等，并且这些重核一般要经过多次衰变后才能形成稳定核。另一方面来源于人工制造。随着核技术的不断发展，利用反应堆和加速器可以人工制造出一些具有放射性的元素，称为“人工放射性同位素”。这些元素可以是轻核，也可以是重核，只需经过一次衰变就变成稳定的核，仅在裂变核反应中才有连续衰变。

24.2.2 核衰变的类型

原子核的放射性衰变有三种类型，即 α 衰变、 β 衰变和 γ 衰变，不论是哪一种衰变，衰变过程中都遵守能量守恒、动量守恒、电荷数守恒和质量守恒。

1. α 衰变

（1） α 衰变的基本特点。 α 衰变是指某种原子核放出一个 α 粒子而变成另一种原子核的过程。 α 粒子实际上就是氦核，衰变过程可表示为



式中，X 为母核；Y 为子核；Q 是衰变能。

式(24. 8)表明，发生 α 衰变后，子核 Y 同母核 X 比较，质量数减少 4，电荷数减少 2。这一规律称为 α 衰变的位移定则。

衰变时释放出的 α 粒子的能量一般在 $4\sim 8\text{MeV}$ 之间，有些核素释放出的 α 粒子能量也可以取几组不同的分立值。这说明 α 粒子能量取值是不连续的，揭示了原子核内部也存在着量子化的能级结构。

(2) α 粒子能谱和核能级的关系。研究 α 粒子的能量和核能级之间的关系有助于研究原子核的结构、性质等问题。利用 α 磁谱仪等方法测量 α 粒子的能量，发现有如下规律：①由同一放射源放射出的 α 粒子能量不是单一的，而是有几组不同的分立取值；②在 α 衰变的同时还有 γ 射线放出；③一般说来 α 粒子能量最大的能谱强度也最强。

利用衰变能(指母核与子核静质能之差)的概念可以解释上述规律。

2. β 衰变

(1) **β 衰变的基本特点** β 衰变是放射性原子核自发进行的同量异位素之间的转变过程。它包括 β^- 衰变、 β^+ 衰变和 K 电子俘获。在这三种过程中，母核 ${}_Z^AX$ 放出一个电子或正电子，或俘获核外轨道上一个 K 壳层电子，子核 ${}_{Z+1}^AY$ (或 ${}_{Z-1}^AY$) 与母核相比，质量数 A 保持不变，核电荷数 Z 改变 ± 1 。其中三种过程的反应式分别为

$$\beta^- \text{ 衰变: } {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e + \bar{\nu}_e + Q \quad (24.9)$$

$$\beta^+ \text{ 衰变: } {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_{+1}^0e + \nu_e + Q \quad (24.10)$$

$$\text{K 衰变: } {}_Z^AX + {}_{-1}^0e_k \rightarrow {}_{Z-1}^AY + \nu_e + Q \quad (24.11)$$

式中， ν_e 为中微子； $\bar{\nu}_e$ 是 ν_e 的反粒子(关于中微子假说见后述)。能发生 β 衰变的核素很多，元素周期表中所有元素几乎都有能发生 β 衰变的核素。

β 粒子和物质相互作用常通过如下三种方式进行：弹性散射、电离作用、韧致辐射。实验表明，若 β 粒子能量较小，则主要是弹性散射与电离作用；若 β 粒子能量较大，则主要是韧致辐射。

(2) **β 粒子的能量** 实验测得 β 衰变时释放出的电子的动能其值由 0 到某个极大值 $K_{\max}$ 形成连续分布，如图 24.2 所示，图中曲线的极大值表示该处 β 粒子数量最多，对应的能量为平均能量，其值为 $\bar{K} \approx \frac{1}{3}K_{\max}$ 。

(3) β 衰变的机制

β^- 衰变，即 ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + {}_{-1}^0e + \bar{\nu}_e$ ，多半是由于母核内含有较多的中子所致。由于重核经过几次 α 衰变后使得核内的中子数与质子数之比急剧上升，为了缓和这个矛盾，它只有相继出现几次 β^- 衰变来降低这个比值。故重核的裂变产物大多是 β^- 放射性的。

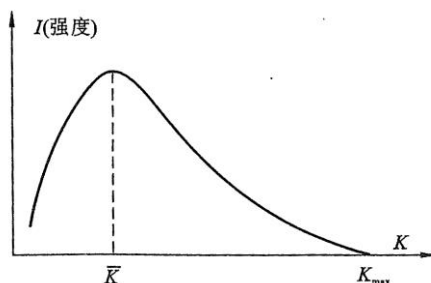


图 24.2 β 粒子能谱示意图

β^+ 衰变，即 ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_{+1}^0e + \nu_e$ ，多半是由于母核内缺乏中子所致。为了补偿中子数的不足，核内的富余质子放出一个正电子 e^+ 而转变为中子。但由于质子的质量小于中子的质量，故在自由状态时质子是不能自发转变为中子的，只有当质子束缚于核内时，才可

能发生转变。

K 俘获，即 ${}^A_Z\text{X} + {}^0_{-1}\text{e}_k \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y} + \nu_e$ ，是指母核俘获核外轨道上的一个电子，使母核中的一个质子转变为中子而蜕变为子核的过程。由于 K 壳层电子在核附近出现的机会多，因此核俘获 K 层电子（L、M 等层的电子也有可能被俘获）的概率最大。K 层电子被俘获后会留下一个空位，这个空位或由外层电子跃迁下来填充，同时发射出 X 射线；或由 L 层电子来填充，但多余的能量不是以 X 射线的形式释放出，而是去激发另一个 L 层的电子使之电离，这种激发称为**自激发**，这样激发出来的电子称为**俄歇（Auger）电子**。因此伴有 X 射线或俄歇电子的发射是 K 俘获的标志。

关于 β 衰变中为什么会发射出电子的问题，可遵照费米（E. Fermi）在 1934 年提出的弱相互作用的 β 衰变理论来解释。费米认为，正像光子是在原子或原子核从一个激发态跃迁到另一个激发态时产生的那样，电子和中微子是在衰变过程中产生的。 β^- 衰变的本质是核内一个中子变为质子， β^+ 和 K 俘获的本质是核内一个质子变为中子。而质子和中子可视为核子的两个不同状态，因此，中子与质子之间的转变相当于核子从一个量子态向另一个量子态的跃迁，在跃迁过程中放出电子与中微子。它们事先并不存在于核内，正像光子是原子在不同定态间跃迁的产物，事先并不存在于原子内一样。导致产生光子的是电磁相互作用，而导致 β 衰变中产生电子和中微子的则是弱相互作用。

3. γ 衰变

正像原子由于某种原因（例如受温度的影响）能达到激发态一样，原子核也可以通过某种方式（例如 β 衰变）达到激发态，但处于激发态的原子核是不稳定的，会像激发态中的原子跃迁到基态发射光子那样，自动地跃迁到低激发态发射出光子，这种现象称为 γ 跃迁，或 γ 衰变。 γ 衰变发射出的光子称为 γ 光子。 γ 衰变可表示为

$${}^A_m_Z\text{X} \rightarrow {}^A_Z\text{Y} + h\nu \quad (24.12)$$

产生 γ 衰变后，母核的质量数和电荷数都不会发生变化，但能量会发生变化。

在 γ 衰变中，一个原子核往往不只发射一个 γ 光子，而是接连发射两个、三个或者很多个光子。多个原子核接连发射的多个光子形成一束 γ 射线。不同的是原子跃迁发出的光子的能量只有 eV~keV 数量级，而原子核跃迁发出的 γ 光子的能量具有 MeV 数量级，它们对应的波长比 X 射线短得多，故医学上常将 γ 射线用来杀死肿瘤，或在外科手术中切割人体组织，俗称“ γ 刀”。

γ 射线与物质相互作用时常产生三种效应：一是光电效应，即光子被物质内原子吸收后放出光电子的现象；二是康普顿效应，即光子被物质内原子散射的现象；三是电子对效应，即当 γ 射线能量超过 1.02 MeV 时，被物质中的原子核吸收后能产生一对正负电子的现象。在这三种效应中， γ 射线均有能量损失。

在 γ 衰变中，除放射 γ 光子外，放射**内转换电子**也是原子核由激发态跃迁到低能态的一种方式。**内转换**是指处于激发态的原子核直接把富余的能量交给它核外某一壳层的电子，使之成为自由电子的过程。这个自由电子称为内转换电子。因此，内转换过程中，

原子核不是放射 γ 光子，而是放射内转换电子。内转换电子是原子核内的核子自旋产生的磁场与核外壳层电子相互作用的结果，不是原子核放射的 γ 射线将电子从原子中直接打出来的。

内转换电子释放后，原来的那个壳层上就留下了一个空位，当较外层的电子填补这个空位时，多余的能量就以 X 射线的形式或俄歇电子的形式释放出来，所以内转换过程常伴有 X 射线或俄歇电子的发射。

24.2.3 放射性衰变规律

原子核作为一个量子体系，使得衰变过程可视为量子跃迁过程并且服从量子统计规律。这样一来，虽然我们不能确切预知任何一个放射性核素发生衰变的准确时刻，但对大量的放射性核素而言，他们作为一个整体的衰变规律却是十分明显的。

1. 放射性衰变规律、半衰期和平均寿命

由于放射性衰变是自发进行的，使得单独存放的放射性核素其数量会不断地减少。设 t 时刻有 N 个原子核，经过 dt 时刻后有 dN 个核衰变，显然，核的减少量 $-dN$ 与原有的核数 N 及衰变时间 dt 成正比，即

$$-dN = \lambda N dt \quad (24.13)$$

式中， λ 为引入的比例系数。积分上式并利用初始条件： $t = 0$ 时 $N = N_0$ ，得

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (24.14)$$

此即放射性衰变规律，如图 24.3 所示。它适合于一切放射性核素，无论它是天然的还是人工制造的，并且该规律与实验测量结果完全一致。

值得注意的是，式 (24.14) 揭示的规律是一种统计规律，因此要求 N_0 很大并应考虑涨落现象。将式 (24.13) 改写可得

$$\lambda = -\frac{dN/dt}{N} \quad (24.15)$$

式 (24.15) 有明确的物理意义，表示在 t 时刻每单位时间内衰变了原子核数占该时刻原子核总数的百分比。故称 λ 为**衰变常数**，它表示一个原子核在单位时间内发生衰变的概率。每一个放射性核素都有它特有的衰变常数 λ ，没有两种核的 λ 是一样的，这样使得人们可以根据测得的 λ 值来判断该核属于哪一种核素。

原子核衰变的快慢除用衰变常数 λ 表示外，还可半衰期 T 和平均寿命 τ 来表征。半衰期 T 是指原子核的数目衰变到一半时所需的时间，即

$$\frac{1}{2} N_0 = N = N_0 e^{-\lambda T}$$

由此得**半衰期** T 为

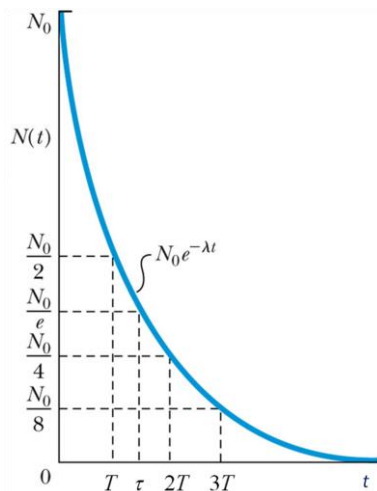


图 24.3 放射性衰变指数规律曲线

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (24.16)$$

正如人的寿命有长有短一样，对于同一种放射性核素而言，各个原子核的寿命也是不一样的。有的核衰变得早，寿命相对短一点，有的核衰变得晚，寿命相对长一点。故用**平均寿命** τ 描写某种核素衰变前存活时间的平均值，即

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_{N_0}^0 t(-dN) = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \lambda N dt = \frac{1}{N_0} \int_{N_0}^0 t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (24.17)$$

综合式 (24.16) 和式 (24.17)，可得 λ 、 T 、 τ 三者之间的关系为

$$T = \frac{0.693}{\lambda} = 0.693\tau \quad (24.18)$$

可见， λ 、 T 、 τ 虽然名称不同，但它们都是从不同侧面描写原子核衰变快慢的物理量。

2. 放射性活度

一个放射源在单位时间内发生衰变的原子核数称为该放射源的**放射性活度**，亦称为**放射性强度**，用 I 表示，即

$$I = \frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (24.19)$$

式中， N_0 为 $t=0$ 时该放射源的原子核数； λN_0 为 $t=0$ 时的强度 I_0 。于是式 (24.19) 可改写为

$$I = I_0 e^{-\lambda t} \quad (24.20)$$

式 (24.20) 表明，放射性活度也是随时间按指数规律变化的。

放射性或度的单位是居里 (Ci)，因居里夫人而得名。

$$1\text{Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ 次核衰变 / 秒}$$

放射性或度的另一种单位是贝克勒 (Bq) $1\text{Bq} = 1 \text{ 次核衰变 / 秒}$ ，即

$$1\text{Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

3. 放射系

一些重核衰变后生成的子核还会继续衰变，直到最后衰变为一个稳定的核素为止。这样，母核与其各子核间就构成了一个放射系。放射系共有 4 个：铀系、钍系、锕系和镎系。前三个为天然放射系，后一个为人工放射系。利用位移定则可以确定每个放射系中各元素相继变化的情况。

4. 放射性平衡

假定母核 A 衰变为子核 B，B 又衰变为它的子核 C，而 C 是稳定核素，且它们没有分开。设 N_1 、 N_2 分别为 A 和 B 在时刻 t 的原子核数，它们的衰变常数分别为 λ_1 、 λ_2 。由于 B 除了因自身的衰变使原子核数要减少外，还会因它的母体 A 的衰变而使原子核数增多，所以，B 在 t 到 $t+dt$ 时间内的变化为

$$dN_2 = (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2) dt \quad (24.21)$$

因 $N_1 = N_{10}e^{-\lambda_1 t}$ (N_{10} 为 $t=0$ 时 A 的原子核数), 所以有

$$dN_2 = (\lambda_1 N_{10}e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2)dt$$

解此微分方程, 并将初始条件: $t=0$ 时 $N_{20}=0$ 代入, 得

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (24.22)$$

式(24.22)表明, B 的原子核数不仅与 λ_2 有关, 还与 λ_1 有关。下面分两种情况讨论:

(1) 暂时平衡。若 A 的半衰期 T_1 并不很长, 但比 B 的半衰期 T_2 长得较多, 即 $T_1 > T_2$, $\lambda_1 < \lambda_2$ 。显然 $e^{-\lambda_1 t} > e^{-\lambda_2 t}$, 当 t 很大时, $e^{-\lambda_2 t}$ 比 $e^{-\lambda_1 t}$ 先趋近于零。于是, 由式(24.22)可得, 当 t 很大时, 有

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1$$

即

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (24.23)$$

$$I_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} I_1 \quad (24.24)$$

式中, I_1 、 I_2 分别是母核和子核的放射性强度。式(24.23)和式(24.24)表明, 若 $T_1 > T_2$, 在时间足够长时, 子核的原子核数和母核的原子核数成一固定比例 $\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$, 子核的放射性活度和母核的放射性活度也成一固定比例 $\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1)$, 这种情形称为暂时平衡。

(2) 长期平衡。如果母核的半衰期 T_1 很长, 并且比子核的半衰期 T_2 长得多, 即 $T_1 \gg T_2$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$ 。此种情形可近似认为 $\lambda_1 \approx 0$, $e^{-\lambda_1 t} \approx 1$, $\lambda_2 - \lambda_1 \approx \lambda_2$ 。当经过几倍 ($7 \sim 10$ 倍) T_2 的时间后, 可认为 $e^{-\lambda_2 t} \approx 0$, 于是由式(24.22)可得

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1 \quad (24.25)$$

$$I_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 = I_1 \quad (24.26)$$

式(24.25)和式(24.26)表明, 若 $T_1 \gg T_2$, 经过 $7 \sim 10$ 倍 T_2 的时间后, 子核的原子核数达到饱和值 $(\lambda_1 / \lambda_2) / N_{10}$, 并且与 N_1 维持恒定的比值 λ_1 / λ_2 , 同时子核的放射性活度与母核的放射性活度相等, 这种情形称为长期平衡。

暂时平衡与长期平衡之间并无严格的界限, 一般当 T_1 比 T_2 大十几倍或几十倍时, 可按暂时平衡处理; 若 T_1 比 T_2 大几百倍以上, 则就是长期平衡。

放射性平衡是具有应用价值的物理现象。有些长寿命的放射性核素生成的子核可能是短寿命的, 当它们达到放射平衡时, 子核的放射性活度与母核的放射性活度相等或保持一定的比例, 利用子体和母体同位素具有不同的物理和化学性质, 可以把子核从母核中分离出来。经过一段时间后, 子核和母核又会达到平衡, 可以再把子核分离出来。这种由长寿命的放射性核素不断分离出短寿命的放射性核素的装置称为放射性同位素发生

器。

5. 放射性的应用

放射性已广泛应用于工业、农业、医学及科学研究等各个方面，现归纳如下：

(1) 射线的应用。是指射线对实物所起作用的应用。工业上利用 γ 射线可进行无损探伤；利用 α 、 β 射线消除空气中有害的静电积累以便于安全生产；农业上可用射线进行育种和品种改良；医学上利用 γ 射线治疗肿瘤和杀菌等。

(2) 示踪原子的应用。由于放射性核素均有射线放出，因此可利用探测器对放出的射线进行探测达到“追踪”这个原子的目的，这种方法称为“示踪原子”法。例如在农业上可用磷 ^{32}P 研究农作物对磷肥的吸收情况，将少量的 ^{32}P 加在肥料中，它被农作物吸收后，可用探测器探测出它在农作物体内的输运情况，这样就可以了解磷对农作物各部分所起的作用；工业上可用这种方法研究机械的磨损量；还可以用这种方法研究杂质在半导体材料中的扩散等。医学上将放射性药物引入人体内，放射性药物或聚集在某些脏器、某些细胞，或参与某些代谢过程，或流经某一通道，用仪器把放射性药物的分布显示出来，就可以为疾病的诊断提供依据。

(3) 放射性衰变规律的应用。利用放射性衰变规律可用来推断地层或古代文物的年代。例如，已知铀系的最后一个子核是 $^{206}_{82}\text{Pb}$ ，于是可根据目前岩石中 $^{238}_{92}\text{U}$ 和 $^{206}_{82}\text{Pb}$ 的含量比，由铀的半衰期估算该地层的年龄；利用生物残骸中同位素 ^{14}C 和 ^{12}C 的含量比可推断生物死亡和文物的年代等。

§24.3 原子核反应

放射性衰变是利用某些不稳定的核素自发地发射出的射线（如 α 射线、 β 射线或 γ 射线）的特殊性质去窥探核内的秘密。其实为了进一步研究核的性质、核内运动形态以及核与核之间的相互作用，也可以利用具有一定能量的粒子，如 α 粒子、质子、中子、 γ 光子或其他粒子去轰击核，使之转变为另一种核素，在这种转变过程中，核内的面目便暴露无遗。这种转变过程就称为**核反应**。即核反应是指粒子与原子核之间的相互作用所引起的各种核变化过程。在核反应过程中也遵从能量守恒、动量守恒、质量守恒及电荷守恒。由于核反应涉及各种核与核的相互作用，且涉及的能量范围又十分宽广（既有小于 1eV 的核反应，又有高达几百 GeV 的核反应， $1\text{GeV}=10^9\text{eV}$ ），因此与核衰变相比，在揭示核的性能方面，它有着更加重要的意义并有着更加广泛的用途。

核反应的研究包括两个方面：一是核反应运动学，它主要研究核反应服从的一般规律；二是核反应动力学，它主要研究参加反应的各粒子间相互作用的动力学规律、核反应发生的概率及不同反应机制的物理模型。下面仅介绍核反应运动学的基本内容。

24.3.1 反应能

核反应一般表示为

$$x + X \rightarrow Y + y + Q \quad (24.27)$$

式中, x 为入射粒子; X 为靶核; y 为出射粒子; Y 为生成核; Q 为反应中释放的能量, 称为**反应能**。该式所示的核反应称为二体核反应, 常用简写式表示为 $X(x, y)Y$ 。若入射粒子能量很高, 则它可激发出三个或更多的粒子, 相应的核反应便称为三体核反应或多体崩裂核反应。此处仅讨论二体核反应。

1. 反应能

设式(24.27)中各粒子的静质量和动能分别用 m_x 、 M_X 、 M_Y 、 m_y 和 E_x 、 E_X 、 E_y 、 E_Y 表示, 根据反应前后总能量守恒, 有

$$m_x c^2 + E_x + M_X c^2 + E_X = M_Y c^2 + E_Y + m_y c^2 + E_y \quad (24.28)$$

反应能是指核反应前后系统的动能之差, 即

$$Q = (E_y + E_Y) - (E_x + E_X) \quad (24.29)$$

若 $Q > 0$, 则式(24.27)所示的核反应为放能反应; 若 $Q < 0$, 则称该反应为吸能反应; 若 $Q = 0$, 则为弹性散射。

反应能 Q 可根据反应前后系统静质量的变化进行计算。由式(24.28)可知

$$(E_y + E_Y) - (E_x + E_X) = [(m_x + M_X) - (m_y + M_Y)]c^2$$

即反应前后系统的动能之差刚好等于反应前后系统的静止能量之差, 故反应能 Q 可表示为

$$Q = [(m_x + M_X) - (m_y + M_Y)]c^2 \quad (24.30)$$

由式(24.30)可知, 只要利用质谱仪分别测出了入射粒子 x 、靶粒子 X 、出射粒子 y 、生成核 Y 的静质量 m_x 、 M_X 、 m_y 、 M_Y 之值, 则反应能 Q 可计算出。

2. 反应能与结合能的关系

考虑二个二体核反应过程

$${}_{Z_1}^{A_1}x + {}_{Z_2}^{A_2}X \rightarrow {}_{Z_3}^{A_3}Y + {}_{Z_4}^{A_4}y \quad (24.31)$$

一方面由反应能的定义式, 有

$$Q = (E_y + E_Y) - (E_x + E_X) = [(m_x + M_X) - (m_y + M_Y)]c^2 \quad (24.32)$$

另一方面, 根据原子核结合能的定义

$$\Delta B = [ZM_H + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2$$

可以证明

$$\begin{aligned} Q &= (E_y + E_Y) - (E_x + E_X) = [(m_x + M_X) - (m_y + M_Y)]c^2 \\ &= (\Delta B_y + \Delta B_Y) - (\Delta B_x + \Delta B_X) \end{aligned} \quad (24.33)$$

式(24.33)即为反应能与结合能之间的关系。它表明, 核反应过程中体系放出(或吸收)的能量 Q , 在测量上表现为体系动能的增加(或减少), 而体系动能的变化是以体系静质量的

减少（或增加）为代价的。体系动能的变化也可以理解为来自于体系结合能的变化，而体系结合能的变化则归咎于原子核结构发生了变化。故由反应能的大小可看出原子结构变化的程度，反应能的概念在核物理中具有重要意义。

3. 阈能

为了使吸能核反应能够发生，入射粒子所需要的最小能量称为阈能。如何确定阈能？它与反应能有何关系？这需要对阈能进行计算。

以 $x + X \rightarrow Y + y + Q$ 所示的二体核反应为例，可以证明，阈能 $E_{\text{阈}}$ 可表示为

$$E_{\text{阈}} = - \left(1 + \frac{A_x}{A_X} \right) Q \quad (24.34)$$

式中 A_x 、 A_X 分别是反应物的核子数。在吸能反应中， $Q < 0$ ，所以 $E_{\text{阈}} > 0$ ，故只有当入射粒子的能量满足式（24.34）时，反应才能进行；而在放能反应中， $Q > 0$ ，所以 $E_{\text{阈}} < 0$ 。因任何粒子的动能都是大于零的，故放能反应中不受阈能的限制，即任何能量的入射粒子都能导致放能核反应。

24.3.2 核反应机制

核反应通常是通过两种不同的方式进行的。一种称为复合核反应方式，另一种称为直接反应方式。

复合核反应方式包括两个步骤：复合核的形成与衰变。复合核的形成是指入射粒子进入靶核后，与靶核中的核子经过多次碰撞并交换能量后，再与其他核子融为一个整体，形成复合核。在复合核中，入射粒子已成为其核子集体中的一个成员，与其他核子再也无法区分，好像入射粒子“忘记”了自己的历史一样。形成后的复合核一般处于激发态，经过一段时间后它会自发进行衰变，放射出射粒子，自身蜕变为子核。这两个步骤可统一用下式表示为



式中， Z 为复合核，左上角*号表明它处于激发态。低能核反应大多都采用复合核方式。

直接反应方式是指入射粒子的能量较高时，它不会和靶核中的其他核子融合为一个整体，而是与靶核中一个或少数几个核子直接作用后射出，使得出射粒子保留了入射粒子的部分特征，好像入射粒子没有“忘记”自己的历史一样。

通常核反应发生时，上述两种方式不是截然分开的，往往同时并用。一般而言，入射粒子能量较低时，复合核方式占主要地位；入射粒子能量较高时，直接方式占主要地位。

实验表明，核反应中必须遵守电荷数守恒（即质子数守恒）、总质量守恒、质量数守恒（即核子数守恒）、总能量守恒、动量和角动量守恒以及宇称守恒。

§ 24.4 原子核的裂变与聚变

在所有核反应中有两种特别令人瞩目的反应，那就是核的裂变反应与聚变反应。由于在这两种反应中都伴随着有巨大能量释放，使得利用核能服务于人类成为可能。故下面介绍这两种核反应的特点及其规律。

24.4.1 原子核的裂变

1. 裂变的一般特点

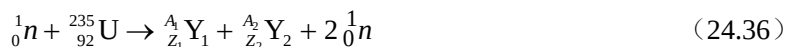
裂变是指一个重核在中子的轰击下分裂为两个质量相差不多的中等核的现象。这种现象既可以看作是一种特殊的核反应，也可以看作是一种特殊的衰变过程。因为一般情况下重核只有在受到另一粒子的激发后才会发生裂变反应，但有些核却只要在它的 $\frac{Z^2}{A}$ 值大到一定程度的情况下就可以自发产生裂变。

1939 年，哈恩(O. Hahn)和斯特拉斯曼(F. Strassman)发现，当中子轰击铀 $^{235}_{92}\text{U}$ 核后，生成钡(Ba, $Z=56$)和镧(La, $Z=57$)两个中重核，同时放出 1~3 个中子。这就是人类首次发现的裂变反应。

1947 年，我国物理学家钱三强和何泽慧也发现了裂变的三分裂现象(概率很小)。

裂变时两碎片的质量数 A 取值可以有多种组合方式，可在 (75, 160) 之间取值。其中 A 取 92 和 144 的概率最大，而对称分裂 ($A=118$) 的概率很小。例如，中子进入 ^{235}U 后，裂变产物可以是 ^{144}Ba 和 ^{89}Kr ，也可以是 ^{140}Xe 和 ^{94}Sr ，共有 60~80 种可能性。两碎片的电荷数 Z 也不相同，可在 (30, 60) 之间取值。其中 Z 取 37 和 38 的概率最大。

裂变的碎片一定都是丰中子素，它们会继续进行 β^- 衰变，直到成为稳定核素为止。例如 ^{235}U 的裂变式为



由于 $A_1 + A_2 = 235$ ， $Z_1 + Z_2 = 92$ ，因此分裂成的 Y_1 与 Y_2 比起相应的稳定核而言有多余的中子。产生这种现象的原因应归咎于重核自身。核素越重，中子的比例就越大，这么多的中子不仅分散在碎片中而且还以自由中子的形式释放出。

由于重核的平均结合能为 7.6MeV，而中等核为 8.5MeV，故裂变时能放出大量的能量。例如每个 ^{235}U 裂变变为两个中重核并达到稳定状态时能放出约 210MeV 的能量。不仅如此，由于每次裂变都有中子发射，例如每个 ^{235}U 裂变平均产生 2.5 个中子，这些中子将使裂变继续维持下去，形成链式反应，从而获得巨大的原子能。

以后的研究证实，不仅中子，而且质子、氦核、 α 粒子及光子都能引起裂变，甚至高能粒子还能使较轻的核发生裂变。

2. 裂变机制

核裂变机制可用液滴模型及复合核反应机制来解释。当中子被核俘获后形成复合核，进而发生裂变。由于一滴液滴要变成两滴，若保持体积不变，表面积就会增加。形成后的复合核又处于激发态，它会发生集体振荡并改变形状，这样一来，一方面表面张力尽量使原子核恢复成球形，另一方面库仑斥力又尽量使核的形变更大成为椭球。这两个方面相互争夺的结果，如果库仑斥力占了上风，则被拉长的椭球有可能断裂为两半而产生裂变。

3. 链式反应

^{235}U 核裂变时除分裂为两块外，每次还释放出 2~3 个中子。如果这些中子又被 ^{235}U 吸收再产生裂变，又会产生第二代中子，依此类推，如果中子没有损失，就会使反应越来越激烈，在一定条件下可能变成爆炸性的核反应，这个过程称为链式反应，可用图 24.4 示意。然而链式反应并不容易发生，其原因是：天然铀中可裂变的 ^{235}U 只占 0.73%，大部分的 ^{235}U 只消耗中子而不发生裂变；另外释放出的中子会从反应体的表面逃脱或被其他杂质吸收，使得中子的产额较低；而且裂变中释放出的中子是快中子，能量在 MeV 数量级，而快中子引发裂变的概率是很小的。

欲使链式反应发生，可施行如下方法：

- (1) 浓缩天然铀中 ^{235}U 的比例。
- (2) 加大反应体的体积以减少表面损失。事实证明，当反应体达到一定的临界体积时，即使铀不浓缩，链式反应也会发生。
- (3) 使快中子慢化为热中子。其方法是让快中子与质量相差不太大的轻核进行弹性碰撞以降低中子的能量，即在反应堆中加入减速剂。常用的减速剂是重水或石墨，它们的质量都很轻，又都不吸收中子。

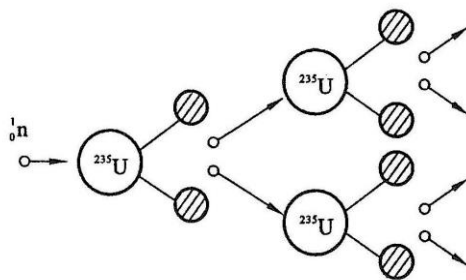


图 24.4 链式核反应示意图

原子反应堆是一种把铀和其他材料按一定的设计方式组合在一起，使之能产生可控链式反应的装置。

反应堆的主要组成部分如下：

- (1) 核燃料。即产生链式反应的物质。一般用浓缩铀，也可以用天然铀。
- (2) 减速剂。它的主要作用是使快中子变成热中子，从而使快中子不被 ^{235}U 等杂质吸

收以保证反应过程中中子的产额满足链式反应的要求。一般用石墨和重水作减速剂，特别是重水还兼有冷却剂的作用。

(3) 反射层。为了防止中子泄漏损失，核燃料必须用能反射中子的反射材料包起来，通常，反射层物质与减速剂相同。

(4) 控制系统。控制系统的主要装置是控制棒。它是用能强烈吸收中子的材料镉或硼作成，通过在减速剂中插入控制棒达到控制中子增殖过程。控制棒又分补偿棒、调节棒和安全棒，它们相互配合以保证反应堆正常运行。

原子反应堆是和平利用原子能的重要工具。利用它获得巨大的原子能可以发电以供我们的生产、生活需要；利用它还可以获得一个强中子源以用于中子实验或生产放射性核素；利用它还可以制造核燃料 ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ 和 ${}^{235}_{92}\text{U}$ 等。

我国在 1958 年建成了第一座原子反应堆，它的额定功率为 7000kW，最大功率可达 10000kW，是用含量为 2% 的 ${}^{235}\text{U}$ 作燃料，用重水作减速剂。继此之后，我国自行设计、建造的第一座 30 万 kW 压水堆核电站——秦山核电站于 1991 年 12 月 15 日并网发电，1994 年 5 月我国第一座百万千瓦级大型商用核电站——大亚湾核电站又相继建成并投入商业运行。目前，我国已建成的核电站还有秦山二期核电站、秦山三期核电站、田湾核电站、岭澳核电工程；另外，海阳核电工程项目、阳江核电工程项目以及福清核电工程项目正在建设之中。

24.4.2 原子核聚变

重核裂变是获得原子能的一种方法，这种方法是利用裂变时原子核结合能发生变化而释放出大量能量。其实获得原子能的方法还有另外一种，它是利用轻核聚合而引起结合能变化从而释放出更大的能量。

由轻核聚变成较重的核，从而释放出巨大能量的反应称为**聚变反应**。例如

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 3.25\text{MeV} \\ {}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + 4.00\text{MeV} \\ {}^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17.6\text{MeV} \\ {}^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} + 18.3\text{MeV} \end{array} \right. \quad (24.37)$$

上述反应都是放能反应，式中第一式的产物 ${}^3_2\text{He}$ 是第四式的材料，第二式的产物 ${}^3_1\text{H}$ 是第三式的材料，所以发生上述 4 种反应的直接、间接的粒子都是氘核(${}^2_1\text{H}$)。在这 4 种反应中，共用了 6 个 ${}^2_1\text{H}$ ，放出的能量为 43.15MeV，即总效果为

$$6{}^2_1\text{H} \rightarrow 2{}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{H} + 2{}^1_0\text{n} + 43.15\text{MeV} \quad (24.38)$$

平均每个核子放出 3.6MeV，大约是中子诱发 ${}^{235}\text{U}$ 裂变时每个核子放出能量的 4 倍!如果上述反应能大量地连续发生，我们就可以获取更大的能量。

聚变与裂变不同，由于原子核都带正电，室温下的两个轻核由于库仑斥力决不会聚合在一起。为了使聚变反应能够发生，常采用如下两种方法：利用加速器使粒子获得较高能量以克服轻核间的库仑斥力达到可以发生聚变的距离，但实践证明这种方法产生聚

变的概率很小。可行的方法是提高温度以增加粒子的动能，使两个轻核克服库仑斥力达到可以发生聚变的距离。理论上可估算，对于 ${}^2_1\text{H}$ 而言，如果每个 ${}^2_1\text{H}$ 的平均动能用 $\frac{3}{2}kT$ 表示，则温度 T 需高达 $5.6 \times 10^8 \text{K}$ ，进一步考虑到 ${}^2_1\text{H}$ 有一定的势垒贯穿概率，且速度服从麦克斯韦定律分布，使得有不少粒子的动能比平均值 $\frac{3}{2}kT$ 大，考虑到这些因素后聚变温度可降至为 10^8K 。这仍然是一个非常高的温度，故聚变反应又称为热核反应。

聚变反应比裂变反应优越的是：每个核子平均放出的能量大，约为裂变的4倍；参与聚变反应的物质 ${}^2_1\text{H}$ 在自然界中的含量极其丰富，因为它可以用水作原料，全世界水的储量为 10^{18}t ，其中 ${}^2_1\text{H}$ 的含量为 $\frac{1}{6000} \times 10^{18} \text{t}$ ；更重要的是聚变反应的产物是 ${}^4_2\text{He}$ ，它是非非常稳定的，没有放射性，使我们人类生存的环境不会受到污染。

§ 24.5 辐射剂量与辐射防护

各种射线（包括带电粒子射线、中子射线和光子射线等）通过物质时都能够直接或间接产生电离作用，因此统称为**电离辐射**（ionizing radiation）。各种电离辐射照射在生物体上，都要引起一系列的生物效应，其轻重程度与生物组织由于射线的电离作用而吸收的能量多少有关。30年代从药物学中借用了“剂量”一词，用来表示人体接受X射线照射的量。这个名词一直沿用到现在并且逐渐给予严格的意义。本节主要介绍剂量概念及其单位，以及放射防护的知识。

24.5.1 辐射剂量

1. 照射量

X射线和 γ 射线在空气中由次级电子产生的离子电荷是比较容易测量的，因此很早就用X射线的电离能力作为度量X射线的客观标准。X和 γ 射线的照射量（exposure）在1975年规定为：

$$E = \frac{dQ}{dm} \quad (24.39)$$

式中 dQ 是当射线照射在质量为 dm 的干燥空气上时产生的正离子或负离子电量的绝对值。 E 是照射量的符号，它的SI单位定义为 $\text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$ ，即在每 kg 干燥空气中产生1C电量的正（或负）离子，没有专门名称。惯用的单位为伦琴（roentgen, R）， $1\text{R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{C} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。应该说明，照射量的定义只适用于中等能量（10keV到3MeV）的X或 γ 射线，普通X射线机发生的X射线和放射性核素发出的 γ 射线就属于这种情况。

2. 吸收剂量

自从1928年国际辐射单位及测量委员会规定照射量以R为单位来量度后，人们就把

它用于测定机器的辐射量和病人的吸收量。但对高能（大于 3MeV）的 X 或 γ 射线，则发现两者很不一致。而且照射量定义为对电磁辐射，并不适合于其它射线的剂量测定。因此人们开始考虑适合于描述任何一种电离辐射（包括 α 、 β 、 β^+ 、质子、中子等射线和 X、 γ 射线）所引起的生物效应大小的物理量。

由于任何一种电离辐射作用于生物体内所引起的生物效应的大小主要取决于物质吸收电离辐射能量的多少。为此，人们引入**吸收剂量**（absorbed dose，符号为 D）的概念。吸收剂量定义为每单位质量的被照射物质从电离辐射中吸收的能量。它的 SI 单位为戈瑞（Gray, Gy），1kg 物质吸收 1J 的能量，其吸收剂量即为 1Gy = 1J · kg⁻¹。吸收剂量的另一个常用单位是拉德（rad），1rad = 10⁻²Gy。

3. 射线品质因数和剂量当量

不同生物体内单位质量的组织从各种射线中吸收了同样多能量所产生的生物效应有很大差别，这是因为射线对细胞的破坏能力，不仅与它吸收的能量和产生的离子有关，还与电离的密集程度有关。在射线径迹上发生密集电离时，细胞受到的伤害比稀疏电离时要大得多。X 和 γ 射线的电离作用主要由二次电子射线产生，而二次电子射线和 β 射线的电离能力差不多，并且都较弱。在相同条件下吸收同样剂量的 X、 γ 和 β 射线所产生的生物效应大致相同。 α 射线、质子射线径迹上的电离密度比 β 射线大得多，因此同样吸收剂量的 α 射线所产生的生物效应要比 β 射线强烈得多。中子射线的电离作用主要是由反冲质子和核反应产物所产生的，快中子的生物效应几乎和带电重粒子射线同样强烈。慢中子的能量大部分在（n, γ ）反应中转化为 γ 射线，所以它的生物效应比快中子弱一些。根据射线的生物效应的强弱程度，我们可以大致规定一个品质因数(quality factor, QF)，如表 24-1 所示，这里以 X 射线和 γ 射线作为比较的标准。生物效应实际上还与细胞的种类和所处环境(例如血液和氧供应)有关，有氧比无氧时更敏感，而且细胞核比细胞质更敏感。QF 主要应用于辐射防护。

表 24-1 射线的品质因数

射线种类	品质因素 QF（近似值）
X 和 γ 射线	1
β^- 和 β^+ 射线	1
慢中子	1~5
快中子	10
快质子	10
α 粒子	~20

在辐射防护中，人们规定用**剂量当量**（dose equivalent，记作 H）来衡量各种辐射对生物组织的影响，它定义为：

$$H = D \times QF \tag{24.40}$$

当吸收剂量 D 的单位为 Gy 时，H 的单位称为希沃特(sievert, Sv)，它的另一个常用单位

是雷姆(rem)， $1\text{rem}=10^{-2}\text{Sv}$ ，也就是吸收剂量为 1rad 时的剂量当量。

例题 24.1 有甲、乙两人，甲的肺组织受 α 射线照射，吸收剂量为 2mGy；乙的肺组织受 X 射线照射，吸收剂量为 1mGy，同时还受 β 射线照射，吸收剂量也是 1mGy。试比较这两人所受射线影响的大小。

解：射线对人体组织的影响仅靠吸收剂量是无法作出判断的，只有借助于剂量当量来衡量。

参考表 24-1 所列数据，甲的肺组织受到的剂量当量为：

$$H = D_{\alpha} \times QF_{\alpha} = 2 \times 10^{-3} \times 20 = 40 \times 10^{-3} \text{Sv}$$

乙的肺组织受到的剂量当量为：

$$H = D_{\alpha} \times QF_{\alpha} + D_{\beta} \times QF_{\beta} = 1 \times 10^{-3} \times 20 + 1 \times 10^{-3} \times 1 = 21 \times 10^{-3} \text{Sv}$$

相比之下，甲受到的辐射影响比乙大。

剂量当量只限于在辐射防护所规定的最大容许剂量当量附近或更低时才可以使用。我国目前规定，全身或某些重要器官（性腺、骨髓、眼晶状体等）每年所受照射的剂量当量，放射工作人员不得超过 50mSv，放射性工作地区附近居民不得超过 5mSv，一般居民还应低些，但医疗照射不受这个限制。

4. 本底辐射和射线对人体的效应

人们在日常生活中一直受到各种射线的照射，这种天然照射称为本底辐射(background radiation)，它的来源大致如表 24-2 所示。

表 24-2 本底辐射的典型来源

来源	本底辐射（mSv/y）
外照射：	
宇宙射线（包括中子）	0.5
地面照射（包括空气）	0.5（此值与地理位置有关）
内照射：	
^{40}K	0.2
其他放射性核素	0.05
总计	1.25

在本底辐射中有 30%~40%来自地球外空间的宇宙射线。地球表面的大气对宇宙射线（以及紫外线）有一定吸收作用，在海拔高的地区，这种保护作用有所削弱。在海拔 3000m 的地方，本底辐射要比海平面高 20%。

来自人体本身的天然放射性（主要是 ^{40}K ）约占本底总数的 20%。另外一个放射线的来源是空气中的氡气。它的半衰期约为 4 天，然后蜕变为固体附着在它遇到的任何固体（例如尘埃）上。当我们呼吸时，它就能粘着在肺壁上，因此肺部每年受到的辐射比身体的其他部分约高 9 倍。空气中氡的含量与建筑物的材料很有关系。在木屋中，肺部受到氡的照射量只为砖房的 1/2，为混凝土结构的 1/3。烟叶在干燥过程中能收集放射性，

因此吸烟者所受的放射量一般比不吸烟者要高几倍。

射线对人体可以产生一系列的不良效应，其中包括皮肤红斑、毛发脱落、溃疡、肺纤维化（硬化）、白细胞减少、白内障以及引起恶性肿瘤。此外，射线还可以使生殖细胞发生突变，引起遗传变异。所有这些生物效应都与剂量当量有关，当然和被照部位以及年龄等也有关系。年纪愈小，愈容易受到射线的伤害，特别是发育中的胚胎对射线最为敏感。辐射的遗传效应，对于妇女比对男人更为严重，其远期后果还不很清楚。地球上的本底辐射如果增加很多倍，它对人类和整个生物界的影响是难以预测的。

24.5.2 辐射防护

放射性核素在医学和国民经济其它各部门都得到了广泛的应用。同放射性核素接触的人也日益增多，因此对射线的防护问题也是十分重要的，必须加以重视。

1. 最大容许剂量

人们在自然条件下也会受到各种射线的照射。这些射线有的来自宇宙太空，有的来自地球上的放射性物质。可见受到一定剂量的射线照射并不会影响人体的健康，当然这一剂量应该是有限度的。国际上规定经过长期积累或一次照射后对人体既无损害又不发生遗传危害的最大容许剂量称为最大容许剂量(maximum permissible dose)。随着人们对放射损伤及防治研究的进展，最大容许剂量的规定也在不断改变。各国规定有所不同。我国现行规定的最大容许剂量为每周 100mRem，即每年不超过 5Rem。

2. 外照射防护

放射源在体外对人体进行照射称为外照射。人体受外照射的剂量与离放射源的距离和停留在放射源附近的时间有关。因此，与放射源接触的工作人员应尽可能利用远距离的操作工具，熟练地掌握操作技术，以减少在放射源周围停留的时间。此外，应在放射源和工作人员之间放置屏蔽，以减弱放射性活度。对 α 射线，因其贯穿本领低，射程短，工作时只要戴上手套就行了，不必考虑外照射的防护。 β 射线除利用距离防护和时间防护外，屏蔽物质不宜采用原子序数高的物质，因为原子序数高的虽然衰减系数大，但易产生韧致辐射，故一般都采用有机玻璃、铝等原子序数中等的物质作屏蔽材料。 X 射线和 γ 射线因穿透能力大，多采用重原子序数的物质如铅、混凝土等为屏蔽材料。对于中子的屏蔽原则是使快中子慢化，将热中子吸收。一般用铍、铅等材料使快中子慢化，这些材料的原子序数高，慢化效果不好，但可以吸收 X 射线和 γ 射线，再用含氢的材料如水、石蜡、石墨等进一步使中子慢化为热中子，并用含硼或锂的材料吸收这些热中子。

3. 内照射防护

放射性核素进入体内对人体进行照射称为内照射。由于 α 射线的电离作用很强，因此 α 射线在人体内造成的伤害比 β 射线、 γ 射线都要严重。任何射线的内照射都应该尽量避免。为此，与放射性核素接触的人员要有严格的规章制度，以防止放射性物质从呼吸道、食道或外伤部位进入体内。只要工作细心，遵守规章制度，内照射是完全可以避免的。

§ 24.6 放射性核素在医学上的应用

放射性核素在医学上的应用基本上可分为治疗和示踪原子两个方面。治疗应用可以分为三类。一类是用 ^{60}Co 的 γ 射线从体外照射，主要用于治疗深部肿瘤，如颅脑内及鼻咽部的肿瘤。这种治疗机俗称钴炮，其中 ^{60}Co 的活度约为数百到 1000Ci，它与高压 X 射线治疗机比较，光子能量较大且较单纯，设备也较简单。另一类是利用低能 β 射线照射体表疾患，通常把放射源（例如 ^{32}P 等）敷贴于患部。第三类是把放射源引入体内，最常见的是用 ^{131}I 治疗甲状腺功能亢进和部分甲状腺癌等。由于甲状腺有集碘功能，引入体内的 ^{131}I 通过血液循环很快集中在甲状腺中，它的 β 射线将杀伤部分甲状腺组织，它的 γ 射线则基本上逸出体外。

放射性核素作为示踪原子的应用更为广泛，它在衰变时发出的各种射线很容易被探测，显示出它的踪迹。放射性核素与稳定的核素混在一起时，这种元素能够显示出在各种过程中的动态变化，因此称为示踪原子或标记原子。示踪原子方法的灵敏度很高，一般的光谱分析方法可鉴定 10^{-9}g 的物质，放射性示踪原子方法能检查出 $10^{-14}\sim 10^{-14}\text{g}$ 的放射性物质。例如在免疫分析方法中使用示踪原子，可以把灵敏度提高很多倍。

临床上的示踪诊断应用日益广泛，例如应用 ^{131}I 标记的马尿酸作为示踪剂，静脉注射后通过肾图仪扫描记下肾区的放射性活度随时间变化情况，可以反映肾动脉血流、肾小管分泌功能和尿路的排泄情况。又例如把胶体 ^{198}Au 注射到体内后，将通过血运而集积在肝脏内，但不能进入肝肿瘤中。从体外探测 ^{198}Au 发出的 γ 射线可以了解胶体金在肝脏内的分布情况，为肝癌的诊断提供有力的依据，并且可以确定病变的位置和大小。从体外探测了射线，以显示放射性物质在体内分布情况的显象装置有 γ 扫描机和 γ 照相机两种：扫描机在一定时间内只探测体内一个小区域中发出的 γ 射线，用逐点逐行扫描的方式来获得放射性物质在体内某个部位分布的整个图象； γ 照相机可同时探测体内某个部位中各处发射的 γ 射线，并且区别出发射的位置，通过累积 γ 光子的计数而得到放射性物质分布的图像。 γ 扫描机的价格比 γ 照相机低廉得多，但后者的灵敏度较高，完成一幅放射性分布图象的时间也较短，因此特别适宜于动态测量。

放射性核素虽然有 2000 多种，但临床常用的只有十多种，这是因为适宜于临床应用的放射性核素除了化学和生理学方面的要求以外，在物理性质方面还要求它发射出适于探测的射线，它的半衰期也应当较为适宜，太短不能通过代谢过程，太长则在引入体内一定放射性活度的前提下，引入体内的放射性物质过多，对人体伤害过大。半衰期数小时的核素特别适宜于临床应用，但除了使用“母牛”以外，只能够就地制备，而不能集中供应。尽管有这些因素限制，放射性核素在医学中的应用还是日益发展，形成了一门新的边缘科学--核医学。

§ 24.7 粒子物理简介

从 1896 年贝克勒尔（Becquerel）发现原子核的放射性之后，1911 年卢瑟福从 α 粒子散射实验中获得了原子内部存在原子核的正确认识，人们便开始对原子核的结构以及物

质结构进行更深层次的研究，并对核能的开发与利用产生了兴趣，建立了原子核物理这一分支学科。现在人们对物质结构的认识已深入到原子核内部的“亚核子”世界，建立了基本粒子的标准模型。标准模型基本粒子包括夸克、轻子和规范玻色子。研究基本粒子及其之间的相互作用、相互转化规律的学科称为粒子物理。

本节首先介绍原子核的组成与核的一般性质、核子运动的基本规律及它们之间的相互作用，并对核能的利用作简单介绍；继而介绍粒子家族和粒子间的相互作用以及粒子物理实验。

24.7.1 标准模型简介

标准模型是描述和解释组成物质的基本粒子及它们之间的强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用的理论。根据标准模型，所有的物质都是由三种基本粒子构成：轻子、夸克及规范玻色子。轻子有电子、 μ 子、 τ 子，及其相应的中微子，再加上各种对应的反粒子，总共 12 种轻子。夸克具有六种味（上夸克，下夸克；粲夸克，奇异夸克；底夸克，顶夸克）及三种色（红、绿、蓝），再加上各自对应的反粒子，总共 36 种夸克。规范玻色子包括光子、八种胶子、 W^+ 和 Z^0 粒子共 12 种矢量玻色子及至少一个标准模型最后被发现的标量玻色子——Higgs 粒子，Higgs 场与其他基本粒子的相互作用赋予了基本粒子以质量。

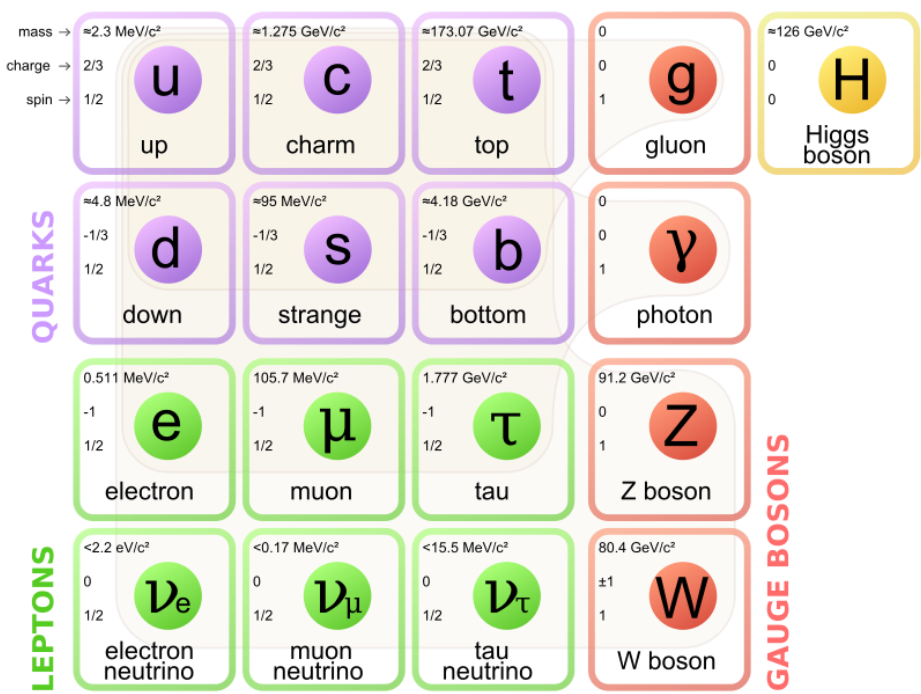


图 24.5：标准模型基本粒子，来自维基百科

1. 轻子

1.1 电子和正电子

1897 年汤姆逊 (J.J. Thomson) 发现电子，人们认识到原子不再是物质基本单元，与此同时量子物理蓬勃发展，物质的基本单元的研究开始了新的篇章。

1927 年狄拉克 (P. Dirac) 给出电子的相对论量子力学方程 (狄拉克方程)，然而该方程无法避免负能解的问题。为了解释负能解，狄拉克提出一个假设：电子存在反粒子——正电子，正电子的质量和自旋与电子一样，但是其所带电荷相反。二十世纪四十年代末期斯图克尔伯格 (E. Stueckelberg) 与费曼 (R. Feynman) 提出一个能更加简单而有力地解释负能态的理论。根据他们的理论，每种粒子都有其对应的反粒子，粒子与反粒子具有相同的质量和相反的电荷。

1930 年，中国物理学家赵忠尧先生发现 γ 射线通过量子物质时存在的反常吸收，即正负电子对湮没现象，这是人类历史上第一次观测到正电子。两年后，他的同学安德森 (C.D. Anderson) 利用云室观测到正电子的径迹，如图 24.6 所示。云室置于磁场中，磁场方向垂直纸面朝里，中间的黑色平板为 6mm 的铅板，可帮助推测出粒子行进的方向。图中轨迹的曲率暗示该粒子带有正电荷，其电荷大小和质量与电子相当。

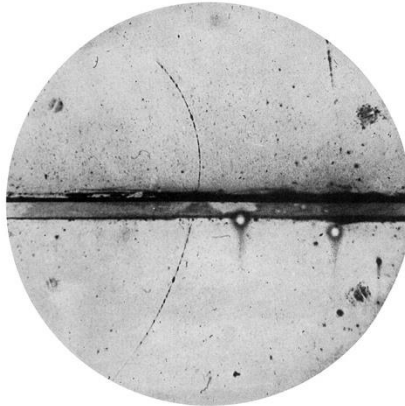


图 24.6 宇宙射线中的正电子在云室中留下的径迹，来自维基百科

1.2 μ 子

1937 年安德森 (C.D. Anderson) 和内德梅耶 (S.H. Neddermeyer) 以及斯特里特 (J.C. Street) 和史蒂文森 (E.C. Stevenson) 分别从宇宙射线的研究中发现了一种质量介于质子与电子之间的具有 +1 及 -1 电荷的带电粒子 μ 子。他们本以为这个粒子是汤川秀树预言的传递核子相互作用的 π 介子。上世纪 40 年代中国物理学家张文裕在世界上第一个证明 μ 子不参与强相互作用，它的性质与电子类似，属于轻子家族。

1.3 τ 子

1975 年马丁佩尔 (M.L. Perl) 领导的 SLAC-LBL 实验团队发现了 τ 子。 τ 子发现后的很长一段时间，其质量的测量结果不满足轻子普适性原理。1992 年我国科学家利用大科学装置北京谱仪给出了精确度提高 10 倍的 τ 子质量测量结果，确认了轻子普适性是成立的，震撼了国际高能物理界，被认为是 1992 年国际上最好的粒子物理成果，被评为 1993 年国际十大科技新闻之一，被粒子数据小组 (PDG) 确认为粒子物理界 50 年来的重要实验数据之一。

1.4 中微子

1930 年泡利 (W. Pauli) 为了解释氮核的自旋危机以及核的 β 衰变过程中的能量守恒问题, 提出中子假说, 该粒子为具有半整数自旋的中性粒子, 与物质相互作用很弱, 可以不受阻碍的穿过很厚的物质。1932 年查德威克发现中子, 可以解释氮核危机, 但中子与核有很强的相互作用, 不能解释 β 衰变过程中的能量守恒问题。因而除了中子, 还需要另外一种不同性质的粒子, 费米建议称之为中微子。1934 年费米建立了第一个 β 衰变理论, 根据费米的理论, 核的 β 衰变本质上是中子衰变为质子加电子加一个中微子 ($n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$)。1956 年柯温 (C.L. Cowan) 和莱因斯 (F. Reines) 利用核反应堆中微子实验通过反 β 衰变过程 ($\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^-$) 直接证实了中微子的存在。之后戴维斯 (R. Davis Jr.) 和哈默 (D.S. Harmer) 通过中微子和中子靶的散射实验证实了反中微子与中微子是不同的粒子。1962 年莱德曼 (L.M. Lederman), 施瓦兹 (M. Schwartz) 和斯坦伯格 (J. Steinberger) 利用加速器中微子实验发现 μ 子型中微子。标准模型中, 三代轻子 (电子、 μ 子、 τ 子) 都有其相应的中微子, 它们有三种相应的轻子数, 在所有反应过程中三种轻子数分别守恒。除了 β 衰变外, 前面提到的 π 介子与 μ 子的衰变过程也包含中微子, 其反应分别为: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, 以及 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ 。标准模型中, 中微子没有质量。但是实验上发现的中微子振荡现象后, 人们认识到中微子具有质量。“中微子振荡的发现, 第一次突破了粒子物理的标准模型, 打开了寻找新物理的窗口。”

2. 夸克

上世纪 60 年代, 大量的亚原子粒子被发现, 这些粒子是否都是基本粒子? 是否有些粒子比其他粒子更基本呢? 根据粒子的电荷与奇异数, 盖尔曼 (M. Gell-Mann) 和拉尼曼 (Y. Ne'eman) 分别给出了粒子八重态分类, 如图 24.7 所示, 反应了强子内在的规律性, 预示了这些粒子有更深层次的结构, 从此粒子物理有了自己的元素周期表。1964 年, 布鲁克海文 (Brookhaven) 实验室的一个组根据八重态的预言, 发现了 Ω^- 粒子。

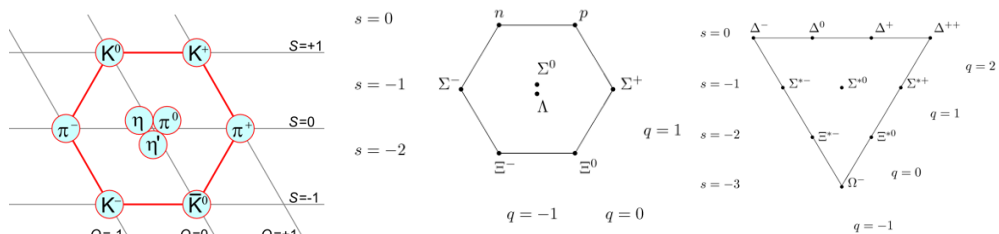


图 24.7 介子八重态、重子八重态及重子十重态, 来自维基百科。

1964 年盖尔曼和茨维格 (G. Zweig) 分别独立提出了夸克模型, 认为强子是由更基本的粒子夸克所组成。夸克具有三种味 u (上夸克)、 d (下夸克)、 s (奇异夸克), 每一种夸克都有其对应的反夸克。重子由三种夸克构成, 反重子由三种反夸克构成, 介子由正反夸克构成。根据夸克模型和群论中的权图叠加方法, 可以得到介子八重态及重子八重态和十重态的分布。

1974 年丁肇中领导的布鲁克海文实验室与里克特 (B. Richter) 领导的斯坦福线性加

速中心 (SLAC) 几乎同时发现一种新的介子称为 J/ψ 粒子。该介子质量为 $3097\text{MeV}/c^2$ ，主要衰变到 e^+e^- ， $\mu^+\mu^-$ ，或强子，其平均寿命大约为 10^{-20} 秒。这些结果表明该粒子为自旋为 1 的粲 (charm) 夸克偶素。此后不久更多粲夸克偶素被发现。几年后具有非零粲数的 D 介子及 Λ_c 重子也被观察到。

1977 年布鲁克海文实验室发现质量为 $9460\text{MeV}/c^2$ 的底 (bottom) 夸克偶素 Υ 粒子。之后，底夸克偶素激发态及具有非零底数的 B 介子也被观测到。1995 年费米实验室 Tevatron 加速器上通过正反质子对撞实验发现顶 (top) 夸克。

1964 年，格林伯格 (O.W. Greenberg)，韩 (M.Y. Han) 和南部 (Y. Nambu) 引入夸克的一种新的自由度——称为“色”。1973 年格罗斯 (D. J. Gross)、波利策 (H. D. Politzer) 和维尔切克 (F. Wilczek) 发现了渐近自由性质，奠定了描述夸克之间强相互作用的理论——量子色动力学 (QCD) 理论基础。自然界所有发现的粒子均以色单态的形式存在，称之为色禁闭或夸克禁闭。夸克禁闭解释了自然界从未发现自由夸克的现象。

量子色动力学并未要求粒子只能以正反夸克或者三种夸克 (或反夸克) 构成。1984 年武汉大学刘觉平教授首次构造了由五夸克场构成的重子流算符，得到了超子 $\Lambda(1405)$ 量子色动力学求和规则，发表了世界上第一篇对于多夸克态的研究论文。近年来实验发现了一些奇特态粒子，它们无法用传统的介子和重子来解释，而是多夸克态。2013 年 3 月北京谱仪 III (BESIII) 国际合作组宣布发现了一个新的四夸克态粒子 $Z_c(3900)$ ，该发现引起国际广泛关注，并于同年 6 月被《物理评论快报》、《自然》等杂志做了热点报道，被国际物理学顶级期刊、美国物理学会主编的《物理》杂志选为 2013 年国际物理学领域重要成果之首。随后，北京谱仪 III (BESIII) 国际合作组又发现了一系列含四个夸克的粒子。2015 年以中国物理学家为主的研究团队利用欧洲核子研究中心大型强子对撞机上的 LHCb 发现两个五夸克态粒子 $P_c(4450)$ 和 $P_c(4380)$ 。



图 24.8 介子、重子及奇特强子，由 BESIII 国际合作组提供。

除了多夸克态，QCD 理论还预言了胶球 (由胶子组成的粒子)、混杂态 (由胶子和夸克组成的粒子) 等奇异粒子。寻找非常规强子态 (多夸克态、混杂态和胶球态等) 是高能实验研究的一个重要研究课题。目前中国的北京谱仪 III 国际合作组和美国杰斐逊国家实验室的 GlueX 国际合作组都在努力攻克这一国际前沿课题。2016 年，武汉大学作为亚洲第一个研究单位加入 GlueX 国际合作组，成为目前中国唯一同时参与 BESIII 和 GlueX

实验的研究单位。

3. 中间媒介子和相互作用

3.1 四种相互作用

迄今为止，自然界所有的物理现象，都可以通过四种基本相互作用机制来描述。这四种基本相互作用分别为：电磁、强、弱及引力相互作用，如表 25-3 所示。

表 25-3 四种基本的相互作用

力	场强	作用力程（米）	媒介子
强	10	10^{-15}	胶子
电磁	10^{-2}	无限大	光子
弱	10^{-13}	10^{-18}	W^+ 和 Z^0
引力	10^{-42}	无限大	引力子

电磁相互作用的媒介子为光子，强相互作用的媒介子为胶子，而弱相互作用的媒介子为 W^+ 和 Z^0 粒子。光子、胶子和 W^+ 和 Z^0 粒子都是自旋为 1 的粒子，因而也被称为中间矢量玻色子。光子和胶子都是质量为零的粒子。光子不带电荷，而胶子带有色荷。引力的经典理论是牛顿提出的万有引力定律，其相对论理论是爱因斯坦的广义相对论，但目前仍未得到一个令人满意的量子化的引力理论。引力比其他力要弱的多，它只有一种荷，因而对宇观现象特别重要，但对于微观现象可以忽略。

3.1 光子和电磁相互作用

1905 年爱因斯坦提出光量子化概念并解释了光电效应现象。1932 年康普顿（A.H. Compton）散射实验进一步证实了光的粒子性。光子是电荷为零、质量为零的粒子，作为电磁相互作用的场量子或媒介子，光子可以传递电磁相互作用，带电粒子通过吸收或放出一个光子实现它们之间的电磁相互作用。宏观世界除引力及 β 衰变外，几乎所有的物理现象都可以由电磁力所描述。描述电磁相互作用的量子场论称为量子电动力学。电磁力对于粒子的结构及相互作用起着非常重要的作用。光子作为媒介子，具有自旋为 1，质量为 0，电荷为 0 的特点，能将电磁相互作用传递到无穷远处。在电动力学的框架内，所有的电磁相互作用都可以分解为带电粒子吸收或放出一个光子。

3.2 W^+ 、 Z^0 粒子和弱相互作用

格拉肖（S.L. Glashow），温伯格（S. Weinberg）和萨拉姆（A. Salam）的弱电统一理论预言了三种弱相互作用的媒介子，并预言其质量分别为 $M_W=82 \pm 2\text{GeV}/c^2$ ， $M_Z=92 \pm 2\text{GeV}/c^2$ 。1983 年 1 月，鲁比亚（C. Rubbia）的小组发现 W 粒子（ $80.403 \pm 0.029\text{GeV}/c^2$ ），同年 6 月，发现 Z 粒子（ $91.188 \pm 0.002\text{GeV}/c^2$ ）。不同于其他三种相互作用，弱力并不将物质束缚在一起，而是在衰变中扮演着重要的角色。弱力控制核的放射性及核裂变，导致了原子核的不稳定性及重核的形成。如果没有弱相互作用，太阳将不再闪耀。弱相互作用也主导了有质量的夸克和轻子向更轻的夸克和轻子跃迁的过程。轻子不带有色荷，不参与强相互作用；中微子不带电荷，不参与电磁相互作用；但所有的夸克和轻子都会参与弱相互作用。描述弱相互作用的动力学称为味动力学。由于 W^+ 和 Z^0 粒子很重，弱相互作用为短程力。1956 年，李政道和杨振宁提出弱相互作用宇称不守恒并建议利用极化放射性原子核的 β 衰变过程研究弱相互作用中的宇称不变性问题，同年吴

健雄在 Co^{60} 的 β 衰变实验中找到宇称破坏的肯定证据。

3.3 胶子和强相互作用

强相互作用是将质子和中子束缚在原子核内，并将夸克束缚在质子和中子中的力。描述强相互作用的动力学称为量子色动力学。强相互作用的荷是色荷，其媒介子胶子质量为 0，自旋为 1，但色荷不为 0，因而胶子之间会有很强的自相互作用，导致了强相互作用为短程力。强相互作用耦合常数随着能量的变化而变化，通常称为跑动耦合常数。在核作用力程，强相互作用耦合常数很大，无法使用微扰展开，一度使得强相互作用的量子化理论遇到困难。但在小距离下(如质子内部等)，它变得非常小，这个现象称之为渐近自由，它意味着在一个质子或 π 介子内部夸克间几乎没有相互作用，而这一现象在电子与核子的深度非弹性散射实验中得以证实，并最终导致了量子色动力学的诞生。

4. Higgs 粒子

爱因斯坦晚年就致力于建立电磁力与引力的统一理论。虽然他的统一理论并没有成功，但电弱统一理论却获得了成功。电弱统一理论是描述电磁力及弱力的统一理论。该理论认为存在四种无质量的媒介子，通过自发对称性破缺和希格斯 (Higgs) 机制，其中三个媒介子获得质量成为 $W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子，一个保持无质量成为光子。1983 年 $W^{\pm}$ 和 Z^0 粒子的发现证明了电弱统一理论的正确性。根据电弱统一理论，引导自发对称性破缺至少需要 1 种自旋为零的 Higgs 粒子，Higgs 场与其他基本粒子的相互作用赋予了基本粒子以质量，因而该粒子也被称之为上帝粒子。2012 年 7 月欧洲核子研究组织 (CERN) 的 CMS 与 ATLAS 合作组分别探测到质量为 $125.3 \pm 0.4 \pm 0.5 \text{ GeV}/c^2$ 及 $126.0 \pm 0.4 \pm 0.4 \text{ GeV}/c^2$ 的新玻色子。2013 年 3 月 CERN 宣布该粒子具有零自旋及偶宇称。

5. 超越标准模型

标准模型是 20 世纪物理学最成功最有效的理论之一。然而标准模型并不包含引力，而且即使不包括引力，标准模型仍然是一个不完备的理论，仍然存在许多未解之谜。为什么基本粒子的质量相差那么大？为什么我们的世界充满了物质，反物质却很少？为什么夸克和轻子恰好有三代？夸克和轻子确实是最基本的物质还是由更基本的物质构成？什么是暗物质？标准模型的中微子质量为零，但中微子振荡实验表明中微子具有质量，那么三种中微子哪个最轻哪个最重？中微子 CP 破坏有多大？轻子领域的 CP 破坏是否最终能导致重子领域反物质的缺失？是否存在超对称粒子？所有这些问题都需要超越标准模型的理论去解释。二十世纪七十年代，人们将统一理论又向前推进了一步——建立了大统一理论，将强力与电弱力统一起来。虽然强、电磁、弱力的耦合常数相差较大，但耦合常数是随能量变化而变化的量，在超对称模型中，当能量增加到一定能标，三种耦合常数完美的汇聚为一点。大统一理论破坏重子数守恒，因而预言了质子的衰变。大统一理论将基本粒子的三大相互作用统一起来，是人类迈向统一理论的重要一步，但目前的实验尚无法证明大统一理论的正确性。

24.7.3 粒子物理实验

粒子物理实验的研究对象是亚原子粒子，由于这些粒子很小，根据测不准原理，需要利用高能量，因此粒子物理又常常被称之为高能物理。粒子物理实验可分为加速器物理与非加速器物理。

1. 加速器实验

粒子加速器是利用电磁场加速带电粒子的装置，加速器实验是当前粒子物理前沿的主要研究手段。生活中加速器的应用非常普及，如电视机、计算机显示器等，就是利用电子枪产生电子在电场中加速，通过磁场偏转并打在荧光屏上。根据带动粒子运动轨迹加速器可分为直线加速器和环形加速器；根据被加速粒子的种类可分为轻子（如电子）加速器和强子（如质子）加速器；根据加速粒子撞击方式可分为对撞机实验和固定靶实验；根据能量可分为低能、中能和高能加速器等。目前世界上最大的加速器是位于欧洲核子研究中心（CERN）的大型强子对撞机（LHC）。

始建于 1984 年的北京正负电子对撞机（BEPC）是邓小平同志亲切关怀下建设的中国第一台高能粒子对撞机，1988 年 10 月完成建设，成功实现正负电子对撞。《人民日报》报道这一成就，称“这是我国继原子弹、氢弹爆炸成功、人造卫星上天之后，在高科技领域又一重大突破性成就”！2004 年至 2009 年，采用最先进的双环交叉对撞技术改造对撞机，升级为 BEPCII，如图 24.9 左图所示。改造后的 BEPCII 亮度已达到改造前的 80 倍以上，在世界同类型装置中继续保持领先地位。

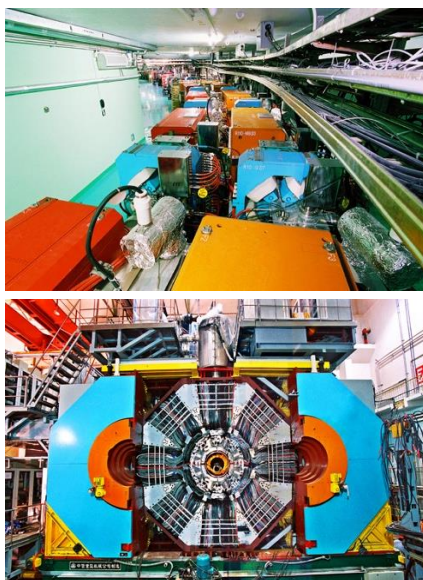


图 24.9 BEPCII 的双储存环（左）与安装完成的 BESIII（右），由 BESIII 国际合作组提供。

粒子探测器是用来探测和鉴别高能粒子的实验设备。粒子探测器有很多种类，计数类的如盖革计数器、云室、泡室、火花室、漂移室、核乳胶、切伦科夫计数器、闪烁体、

光电倍增管等。这些探测器大体上可分为计数器和径迹室两大类，其中计数器类探测器通常是以电脉冲的形式记录、分析粒子产生的某种信息，如盖革计数器、正比计数器、半导体探测器等；而径迹室类探测器通过记录、分析辐射产生的径迹图像测量核鉴别粒子，如云室、泡室、核乳胶等。现代的粒子探测器往往是由几种探测器组成并利用快电子学及总线计数的大型谱仪，可同时测量粒子的多种性能及运动学参量，具有好的粒子鉴别能力。

北京谱仪 III（BESIII）是我国自行设计和研制的大型粒子物理实验装置，其性能达到国际先进水平，如图 24.9 右图所示，主要工作在 2-5GeV 能区，从事 τ -粲物理研究。北京谱仪 III 主要由主漂移室、飞行时间探测器、电磁量能器、 μ 子探测器以及超导磁铁等系统组成。其中主漂移室以多丝正比室为原型发展而来，利用带电粒子在气体中的电离效应来探测带电粒子的径迹、动量，并用于粒子鉴别；而电磁量能器由 CsI(Tl)晶体建成，主要利用电磁簇射测量光子和电子的能量和位置。图 24.10 显示了 BEPCII 对撞产生的第一个事例的径迹。

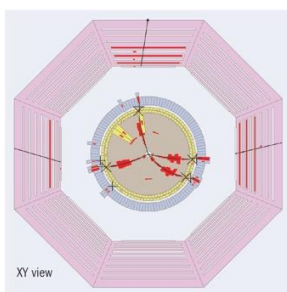


图 24.10 BEPCII/BESIII 上第一个事例的径迹，由 BESIII 国际合作组提供。

北京谱仪 III 通过测量正负电子对撞产生的稳定末态粒子来研究不稳定的短寿命粒子，进而探索物质的基本组成及其相互作用的性质，并寻找新粒子和新物理现象。自 2013 年 3 月 BESIII 宣布发现 $Z_c(3900)$ 粒子以来，BESIII 上已发现一系列含有四个夸克的新的粒子，图 24.11 是 BESIII 探测到的 $Z_c(3900)$ 不变质量谱。

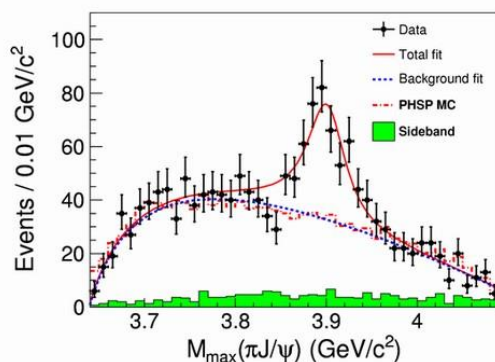


图 24.11 $Z_c(3900)$ 不变质量谱，由 BESIII 国际合作组提供。

2. 非加速器物理实验

非加速器物理实验是指不使用加速器手段进行的粒子物理实验，主要包括宇宙射线及核反应堆实验等。宇宙射线实验有着悠久的历史，在加速器被建造出来之前曾经是粒子物理的主要研究手段，优点是免费、能量高、能谱广，缺点是被探测粒子撞击到探测器的几率小、不可控制。1953 年到 1956 年，在王淦昌领导下，我国第一个高山宇宙线实验站在云南落雪山建立，以多板云室和小磁云室为手段，在奇异粒子和 10 GeV 能区高能核作用研究上取得过辉煌的成就，使我国宇宙线研究进入当时国际先进行列。

核反应堆实验是利用放射性元素分解产生的多种粒子如中子、中微子、 α 、 β 、 γ 射线等进行实验研究。中国正在进行的大亚湾中微子实验及建造中的江门中微子实验就是利用核反应堆研究中微子振荡的实验站。由于中微子只参与弱相互作用，因而能穿过地球不被吸收。因此中微子很难以捕获，需要几千吨甚至更重的大型探测器才有可能探测。近年来的观察发现中微子具有振荡现象和非零的质量。2012 年以中国为主导的大亚湾中微子实验发现了第三种中微子振荡，并测量到其振荡几率。江门中微子是中国下一代中微子探测装置，武汉大学是首批加入江门中微子国际合作组的单位成员。

大亚湾中微子实验建有总长 3 公里的隧道和 3 个地下实验大厅，3 个实验大厅共放置 8 台中微子探测器，每台探测器高 5 米、直径 5 米、重 110 吨，均置于 10 米深的水池中。每个实验厅有中心探测器、水切伦科夫探测器和阻性板探测器三种探测器。图 24.12 中左图是 1 号实验厅的实景图，右图是正在组装的中心探测器。中心探测器的薄壁有机玻璃罐将中心探测器分隔成三层嵌套的同心圆柱，由内向外依次灌装掺钎液体闪烁体，普通液体闪烁体和白油，总重 110 吨。当中微子在探测器中被捕获时，将激发液体闪烁体发出微弱的闪光，由安装在白油中的光电倍增管探测到。



图 24.12 大亚湾中微子实验站 1 号实验厅实景图（左），正在组装的中心探测器（右），由大亚湾国际合作组提供。

思考题

- 24.1 什么叫原子核的结合能？它是不是核子的动能？
- 24.2 核力的主要特点是什么？与电磁力、万有引力相比，核力的数量级如何？
- 24.3 什么叫半衰期？它与原子核的平均寿命有什么关系？
- 24.4 什么叫放射性活度？它是如何随时间变化的？
- 24.5 什么叫阈能？阈能的大小与核反应的吸能或放能有什么关系？
- 24.6 什么是链式反应？链式反应的条件是什么？
- 24.7 什么叫核聚变？哪些因素能够产生核聚变？

习题

- 24.8 已知 ${}^3_1\text{H}$ 的原子质量为 3.01605u ， ${}^3_2\text{He}$ 的原子质量为 3.1603u ，试计算这两个原子的核的质量和两个原子核的结合能？（中子、质子和电子质量分别为 $m_n = 1.008665\text{u}$ 、 $m_p = 1.0072765\text{u}$ 、

$$m_e = 0.0005485 \text{ u}$$

24.9 氦核内每个核子的结合能为 1.09MeV ，而氦核内则等于 7.06MeV 。问两个氦核组成氦核时放出多少能量？

24.10 ${}^6_2\text{He}$ 核的质量是 6.01779u ， ${}^6_3\text{Li}$ 核的质量是 6.01348u ，试计算两个核的结合能和比结合能。

24.11 放射性核素 ${}^{232}_{90}\text{Th}$ 经过 4 次 α 衰变和两次 β 衰变，会形成什么同位素？

24.12 已知 ${}^{131}_{53}\text{I}$ 的半衰期为 8.04 天，求其衰变常数。若 ${}^{131}_{53}\text{I}$ 出厂时的放射性活度为 $450\mu\text{Ci}$ ，问 93 天后放射性活度还有多大？

24.13 实验测得 1g 镭 (${}^{226}_{88}\text{Ra}$) 一秒钟内放出 3.7×10^{10} 个 α 粒子，求它的衰变常数 λ 、半衰期 T 和平均寿命 τ 。

24.14 利用 ${}^{131}_{53}\text{I}$ 的溶液作甲状腺扫描，在溶液出厂时只需注射 0.5ml 就够了 (${}^{131}_{53}\text{I}$ 的半衰期以 8 天计)。

(1) 如果溶液出厂后储存了 11 天，作甲状腺扫描需注射多少溶液？

(2) 如果一次扫描的注射量不能超过 8ml ，溶液的有效寿命是多少？

24.15 设某铀矿中 ${}^{238}\text{U}$ 与 ${}^{206}\text{Pb}$ 二种原子数之比为 $2.785:1$ ，设全部铅 ${}^{206}\text{Pb}$ 都是由于 ${}^{238}\text{U}$ 衰变而来的。(已知 ${}^{238}\text{U}$ 的半衰期为 $T = 4.50\times 10^9$ 年)

(1) 试估算该铀矿的年龄；

(2) 如果在另一铀矿中，二者质量比为 $5:4$ ，则该铀矿的年龄又为多少？

24.16 在大气和有生命的植物中，每 10^{12} 个碳原子中约有 1.3 个 ${}^{14}\text{C}$ 原子， ${}^{14}\text{C}$ 的半衰期为 5730 年，其余的均为稳定的 ${}^{12}\text{C}$ 原子。利用 ${}^{14}\text{C}$ 放射性衰变可以测定古物的年代。这是因为自然界中植物吸收空气中的二氧化碳，动物又吃植物，人又吃植物，所以活着的生物体中碳的两种同位素存量之比同空气中的比值相同。死后的生物体不再吸收碳，其遗骸中的 ${}^{14}\text{C}$ 因衰变而逐渐减少，测出古物遗骸中 ${}^{12}\text{C}$ 和 ${}^{14}\text{C}$ 的存量之比同空气中的比值进行比较，就可推算出古物的年代。现测出一个古墓骸骨 100g 碳的 β 衰变率为 900 次 / 分，试求此墓的年代？

24.17 已知下列几种元素的原子质量及中子、质子质量为 (以 u 为单位， $1\text{u} = 932\text{MeV}\cdot\text{c}^{-2}$)：

$${}^{152}_{62}\text{Sm} \text{ (钐)}: 151.919756\text{u} \quad {}^1_1\text{p}: 1.007825\text{u}$$

$${}^{154}_{63}\text{Eu} \text{ (铕)}: 151.921749\text{u} \quad {}^1_0\text{n}: 1.008665\text{u}$$

试问核反应式： ${}^{152}_{63}\text{Eu} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{152}_{62}\text{Sm} + {}^1_1\text{p}$ 的核反应能 Q 值有多大？该反应是吸能还是放能核反应？

24.18 卢瑟福用 ${}^{214}\text{Po}$ (钋) 放射出的 α 粒子轰击氮核，发生下述吸能核反应： ${}^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$ 。试计算反应阈能？(已知氦核、氮核、氧核、氢核的质量分别为

$$m_{{}^4_2\text{He}} = 4.00260\text{u}、M_{{}^{14}_7\text{N}} = 14.00307\text{u}、M_{{}^{17}_8\text{O}} = 16.99913\text{u}、m_{{}^1_1\text{H}} = 1.007825\text{u})$$

24.19 设一个聚变反应堆的功率为 10^6kW ，若以 $\text{D}+\text{T}$ (氘和氚) 为燃料，试计算一年要消耗多少氘？这么大功率的电站若改用煤作燃料，每年需要消耗多少煤？(已知煤的燃烧热为 $3.3\times 10^7 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$)